اتصال دالة عددية

2 بكالوريا علوم فيزيائية 1
ذ: توفيق بنعمرو

f متّصلة في a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

f متّصلة على اليمين في a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

f متّصلة على اليسار في a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

f متّصلة على المجال $[a,b]$ إذا كانت متّصلة في كلّ نقطة من $]a,b[$ و متّصلة على اليمين في a و متّصلة على اليسار في b .

مجموع و جداء و خارج دوال متّصلة، هي دوال متّصلة، مع مراعاة مجال الاتصال و مجموعة التعريف.

الدوال الحدودية و الجذرية و المثلّثية متّصلة على مجموعة تعريفها

الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ متّصلة على $\mathbb{R}^+$

الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متّصلة على $\mathbb{R}^+$

f دالة عددية و I مجال ضمن D_f . g دالة عددية و J مجال ضمن D_g بحيث: $f(I)\subset J$.

{ الدالة f متصلة على I و الدالة g متصلة على J } $\Rightarrow$ { الدالة $g\circ f$ متّصلة على I }

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$.

$(x\in D_{g\circ f}) \Leftrightarrow (x\in D_f$ و $f(x)\in D_g)$

$(x\in D_{f\circ g}) \Leftrightarrow (x\in D_g$ و $g(x)\in D_f)$

صورة مجال بدالة متّصلة هو مجال

$f([a,b])=[m,M]$ حيث $m=\underset{x\in[a,b]}{Min}\, f(x)$ و $M=\underset{x\in[a,b]}{Max}\, f(x)$

لكلّ $n\in\mathbb{Z}$ لدينا: دالة الجزء الصّحيح غير متّصلة على اليسار في n و متّصلة على $[n,n+1[$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ E(x)\le x<E(x)+1$

$\forall k\in\mathbb{Z}:\ E(k)=k$

مبرهنة القيم الوسيطة: f متّصلة على $[a,b]$. لكلّ λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقلّ عنصر c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$

f متّصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ $\Rightarrow$ المعادلة $f(x)=0$ تقبل **على الأقل** حلاًّ في المجال $]a,b[$

f متّصلة و **رتيبة قطعاً** على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ $\Rightarrow$ المعادلة $f(x)=0$ تقبل **حلاًّ وحيداً** في المجال $]a,b[$

إذا كانت f متّصلة و رتيبة قطعاً على مجال I فإنّ لها دالة عكسية f^{-1} معرّفة على المجال $J=f(I)$.

$f: I\to J$. الدالة $f^{-1}: J\to I$ دالة متّصلة على $f(I)$ و لها نفس منحى تغيّرات f .

التمثيلان المبيانيان للدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ممنظم متماثلان بالنّسبة للمستقيم ذي المعادلة: $y=x$.

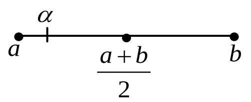
$\begin{cases} f^{-1}(x)=y\\ x\in f(I)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}$

$\forall x\in I:\ f^{-1}\circ f(x)=x$

$\forall x\in f(I):\ f\circ f^{-1}(x)=x$

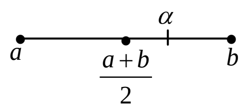
التفرع الثنائي dichotomie

f متّصلة و رتيبة قطعاً على $[a,b]$ بحيث $f(a)f(b)<0$ ، نضع α الحلّ الوحيد للمعادلة $f(x)=0$



مركز $[a,b]$ هو $\frac{a+b}{2}$ ، إذا كان $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ فإنّ $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ سعة هذا التأطير $\frac{b-a}{2}$.

نعيد هذه العملية على $[a,\frac{a+b}{2}]$ فنحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$ و هكذا دواليك....



مركز $[a,b]$ هو $\frac{a+b}{2}$ ، إذا كان $f(a)f(\frac{a+b}{2})>0$ فإنّ $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ سعة هذا التأطير $\frac{b-a}{2}$.

نعيد هذه العملية على $[\frac{a+b}{2},b]$ فنحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$ و هكذا دواليك....

بالتوفيق

المجال I	المجال $f(I)$	
	f تزايدية قطعاً على I	f تناقصية قطعاً على I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim_{x\to a^+} f(x)[$
$]a,b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x),\lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x),\lim_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty} f(x),f(a)]$
$]-\infty,b]$	$]\lim_{x\to-\infty} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim_{x\to-\infty} f(x)[$

$x\ge 0\ ,\ y>0$

$\sqrt[n]{x}=y \Leftrightarrow x=y^n$

$(\sqrt[n]{x})^n = x = \sqrt[n]{x^n}$

$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$

$\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$

$\sqrt[n]{x\times y}=\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$

$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^n}}=\sqrt[m]{x}$

$x>0$

$r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^*$

$x^r=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$

$x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$

$x^0=1$

$\sqrt[n]{0}=0$

$\sqrt[n]{1}=1$

$\sqrt[n\times m]{x^n}=\sqrt[m]{x}$

$x>0\ ,\ y>0$

$r\in\mathbb{Q}^*\ ,\ r'\in\mathbb{Q}^*$

$x^r\times x^{r'}=x^{r+r'}$

$x^r\times y^r=(x\times y)^r$

$(\frac{x}{y})^r=\frac{x^r}{y^r}$

$x^{r-r'}=\frac{x^r}{x^{r'}}$

$(x^r)^{r'}=(x)^{r\times r'}$

$(x)^{-r}=\frac{1}{x^r}$