MATHÉMATIQUES

Concours écoles d'ingénieurs post-bac

FESIC • GEIPI-POLYTECH • ENI • ECE • ESIEE • EFREI • EPF • EPITA...

Daniel Fredon

l'Etudiant

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-054581-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

INTRODUCTION • **LES ÉCOLES D'INGÉNIEURS RECRUTANT AU NIVEAU BAC PAR CONCOURS** iv

CHAPITRE 1 • **RAISONNER JUSTE** 1

CHAPITRE 2 • **CALCULS AVEC LES RÉELS** 15

CHAPITRE 3 • **FONCTIONS NUMÉRIQUES** 22

CHAPITRE 4 • **SUITES NUMÉRIQUES** 46

CHAPITRE 5 • **FONCTIONS USUELLES** 69

CHAPITRE 6 • **CALCUL INTÉGRAL** 88

CHAPITRE 7 • **NOMBRES COMPLEXES** 107

CHAPITRE 8 • **GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN** 130

CHAPITRE 9 • **GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE** 142

CHAPITRE 10 • **DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS** 154

CHAPITRE 11 • **VARIABLES ALÉATOIRES** 174

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les écoles d'ingénieurs recrutant au niveau Bac par concours

Les informations qui suivent concernent les écoles d'ingénieurs recrutant au niveau Bac par concours. Un certain nombre d'écoles recrutent au niveau Bac uniquement sur dossier et entretien. Vous trouverez la liste complète de ces écoles dans le guide Bien choisir son école d'ingénieurs *édition 2010 publié par L'Etudiant et disponible en librairie.*

Les bacheliers représentent 20 % des nouveaux inscrits chaque année en école d'ingénieurs. La grande majorité d'entre eux est issue de terminale S. Car même si quelques écoles s'ouvrent aux titulaires de bacs technologiques STI et STL, ces derniers restent minoritaires. Et même parmi les bacheliers S, une sélection « naturelle » s'opère entre ceux qui ont choisi les options maths ou physique-chimie, plutôt bien placés, et les autres.

Des étudiants moins stressés

Les écoles qui recrutent après le bac proposent pour la plupart un schéma d'études identique comprenant deux années de cycle préparatoire suivies de trois années de cycle ingénieur. Il s'agit en quelque sorte d'effectuer vos deux années de classe prépa au sein d'une école dans laquelle vous poursuivrez ensuite vos études. Cette solution peut se révéler intéressante si vous avez un bon niveau scolaire, mais redoutez à la fois la scolarité au sein d'une prépa traditionnelle et... l'angoisse liée à la préparation des concours d'entrée dans les écoles d'ingénieurs, car la sélection dans les écoles en cinq ans s'effectue généralement sur dossier et entretien.

Durant les deux années de cycle préparatoire, même si le programme des cours reste chargé (dans certains établissements, vous ne verrez pas la différence avec une prépa classique !), les élèves sont moins stressés que ceux des classes prépas traditionnelles. De plus, ils ont l'opportunité de s'investir au sein d'une école qui les accueillera au minimum pendant cinq ans. Enfin, les enseignements sont souvent plus concrets qu'en classe prépa et la plupart des écoles prévoient, dès la première année, un stage en entreprise. Le programme du cycle préparatoire des INSA comporte ainsi des maths, de la physique, de la chimie, de la thermodynamique, de l'informatique, de la mécanique, de la communication et des langues, du sport...

Le redoublement en cycle préparatoire est autorisé, en première ou deuxième année selon les établissements (contrairement aux classes prépas où le redoublement est possible uniquement en deuxième année). Au final, ce sont vos résultats durant les

deux premières années qui conditionnent votre passage en cycle ingénieur. Bien sûr, il peut arriver que certains étudiants soient recalés. « Mais les difficultés apparaissent dès le début et on attend rarement la fin des deux années de cycle préparatoire pour réorienter un élève en difficulté », explique Michel Martin, responsable des admissions à l'UTC (université de technologie de Compiègne).

Les ENI

Les cinq ENI (écoles nationales d'ingénieurs) de Brest, Metz, Saint-Étienne, Tarbes et Blois recrutent en commun leurs candidats en cycle préparatoire première année. Ces écoles ont offert respectivement 140, 140, 110, 190 et 100 places en 2007. Les pré-inscriptions s'effectuent sur Internet (www.admission-postbac.org), de mi-janvier à fin mars. Les candidats peuvent s'inscrire pour une ou plusieurs écoles. Pour le concours 2008, le coût était de 90 €. Pour en savoir plus, vous pouvez contacter le SCRENI (Service commun de recrutement en première année des ENI), BP 1643, 65016 Tarbes cedex, tél. 05.62.44.27.05 ou consulter le site Internet : www.enit.fr.

Le concours des ENI

Il est ouvert aux bacheliers S et STI. La sélection comporte une seule phase d'admission, qui repose sur un examen du dossier scolaire (coefficient 3), une épreuve écrite de 3 h (coefficient 4) et un entretien de motivation de 30 minutes (coefficient 3). À l'écrit, les candidats STI planchent en partie sur un QCM (questionnaire à choix multiple) de maths, physique, chimie et mécanique portant sur le programme de terminale. Les bacheliers S passent la même épreuve que celle du concours GEIPI (voir plus loin).

Liste des ENI

Elles sont cinq, mais l'ENISE Saint-Étienne délivre en fait deux diplômes d'ingénieur, l'un en génie mécanique et l'autre en génie civil.

- **ENIB Brest**
  École nationale d'ingénieurs de Brest, technopôle Brest-Iroise, CS 73862, 29238 Brest cedex 3, tél. 02.98.05.66.00, Web : www.enib.fr.
- **ENIM Metz**
  École nationale d'ingénieurs de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 1, tél. 03.87.34.69.00, Web : www.enim.fr.
- **ENISE Saint-Étienne**
  École nationale d'ingénieurs de Saint-Étienne, 58, rue Jean-Parot, 42023 Saint-Étienne cedex 2, tél. 04.77.43.84.84, Web : www.enise.fr.
- **ENIT Tarbes**
  École nationale d'ingénieurs de Tarbes, 47, av. d'Azereix, BP 1629, 65016 Tarbes cedex, tél. 05.62.44.27.00, Web : www.enit.fr.
- **ENIVL Blois**
  École nationale d'ingénieurs du Val-de-Loire, rue de la Chocolaterie, BP 3410, 41034 Blois cedex, tél. 02.54.55.84.50, Web : www.enivl.fr.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les écoles de la FESIC

La FESIC (Fédération d'écoles supérieures d'ingénieurs et de cadres) rassemble 20 établissements de l'enseignement catholique qui délivrent tous un diplôme d'ingénieur reconnu par la Commission des titres. Le nombre de places offertes chaque année par l'ensemble des écoles est d'environ 2 800.

14 de ces écoles ont mis en place une procédure commune de recrutement, sur dossier, épreuves écrites et éventuellement entretien (les épreuves sont détaillées un peu plus loin), accessible aux titulaires d'un bac S (et STI, pour l'EPMI, l'ESEO et la salle Beauvais ainsi que STL pour cette dernière uniquement). Il s'agit de CPE Lyon, l'EPMI Cergy-Pontoise, l'ESA Angers, l'EI Toulouse, l'ESCOM Beauvais, l'ESEO Angers et Paris, l'ISA Lille, LaSalle Beauvais, l'ISARA Lyon, l'ISEN Brest, l'ISEN Toulon, l'ISEN Lille, l'ISEP Paris et l'École Louis-de-Broglie Rennes.

Cinq autres écoles de la FESIC recrutent, elles, directement sur dossier et, éventuellement, entretien. Il s'agit de l'ECAM Lyon, de HEI Lille et des trois ICAM de Lille, Nantes et Toulouse. À noter, les ICAM de Lille et Toulouse auxquels s'ajoutent les ICAM de Bretagne et de Vendée proposent un cursus en apprentissage.

Le concours commun

L'inscription s'effectue sur Internet (sur www.grandesecoles-postbac.fr), de janvier à mi-avril. Vous devez y préciser, notamment, quel est votre cursus depuis cinq ans et quelles sont vos notes de français obtenues au bac (à l'écrit et à l'oral). Il faudra également verser les frais d'inscription au concours. Ceux-ci sont de 130 € pour le premier groupe et 50 € par groupe supplémentaire, sachant que les écoles sont réparties en cinq groupes. Le groupe 1 comprend CPE Lyon, EPMI Cergy-Pontoise, ESCOM, ESEO, ISEN Brest, ISEN Lille, ISEN Toulon, ISEP, LOUIS de Broglie ; le groupe 2 rassemble les écoles d'agriculture (EI Purpan, ESA, ISA, ISARA-Lyon), le groupe 3 est composé de LaSalle Beauvais, le groupe 4, de HEI et le groupe 5, de l'ECAM et des trois ICAM de Lille, Nantes, Toulouse.

Le dossier de candidature. Il devra contenir vos bulletins de seconde, première et terminale, vos résultats au bac français, une lettre de motivation manuscrite, une lettre d'appréciation de vos professeurs de mathématiques, de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre. Selon les écoles, ce dossier sera plus ou moins important lors de la sélection finale. Par ailleurs, certaines écoles pourront exiger des documents complémentaires.

Le concours. Il a lieu courant mai et comprend trois ou quatre épreuves écrites qui se déroulent sous la forme de QCM en mathématiques (2h30), chimie (1h30), physique (2h30) et, pour les écoles d'ingénieurs en agriculture, en sciences de la vie et de la Terre (1h30). Chaque école applique ses propres coefficients. Le programme des épreuves est du niveau terminale S et porte uniquement sur les enseignements obligatoires (vous trouverez des annales sur le site de la FESIC). À noter, les bacheliers qui ont suivi l'option sciences de l'ingénieur et biologieécologie sont dispensés de l'épreuve de SVT.

Les résultats sont communiqués fin mai et chaque école constitue sa propre liste de candidats admis (ou admissibles pour les écoles qui font passer un entretien). Pour en savoir plus, vous pouvez contacter la sélection FESIC, 35, rue de la Bienfaisance, 75008 Paris, au 01.80.90.53.10 ou sur Internet : www.fesic.org.

REPÈRES Le nombre de places aux concours FESIC

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes procédures de sélection et le nombre de places offertes par les écoles de la FESIC aux concours 2008.

Écoles	Mode de recrutement	Places offertes
CPE Lyon	Dossier et épreuves	220
ECAM Lyon	Dossier	135
École Louis- de-Broglie Rennes	Dossier et épreuves	48
ESA Angers	Dossier, épreuves et entretien	120
EI Toulouse	Dossier, épreuves et entretien	155
EPMI Cergy-Pontoise	Dossier, épreuves et entretien	70
ESCOM Compiègne	Dossier et épreuves	110
ESEO Angers, Paris et Dijon	Dossier et épreuves	252
HEI Lille	Dossier et entretien	350
ICAM (1)	Dossier et deux entretiens	300
ISA Lille	Dossier et épreuves	110
ISARA Lyon	Dossier, épreuves et entretien	120
ISEN Brest	Dossier et épreuves	96
ISEN Toulon	Dossier et épreuves	110
ISEN Lille	Dossier et épreuves	114
ISEP Paris	Dossier et épreuves	110
LaSalle Beauvais	Dossier, épreuves et entretien	230
		Total 2 650

(1) Lille, Nantes et Toulouse.

Liste des écoles

- **ECAM Lyon**
  École catholique d'arts et métiers, 40, montée Saint-Barthélemy, 69321 Lyon cedex 05, tél. 04.72.77.06.00, Web : www.ecam.fr.
- **ÉCOLE LOUIS-DE-BROGLIE Rennes**
  Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz, tél. 02.99.05.84.00, Web : www.ecole-debroglie.fr.
- **EI PURPAN Toulouse**
  École d'ingénieurs de Purpan, 75, voie du Toec, BP 57611, 31076 Toulouse cedex 3, tél. 05.61.15.30.30, Web : www.purpan.fr

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- **EPMI Cergy-Pontoise**
  École d'électricité, de production et des méthodes industrielles, 13, bd de l'Hautil, 95092 Cergy-Pontoise cedex, tél. 01.30.75.60.40, Web : www.epmi.fr.
- **ESA Angers**
  École supérieure d'agriculture, 55, rue Rabelais, BP 30748, 49007 Angers cedex 1, tél. 02.41.23.55.55, Web : www.groupe-esa.com
- **ESCOM Compiègne**
  École supérieure de chimie organique et minérale, 1, allée du réseau Jean-Marie-Buckmaster, 60200 Compiègne, tél. 03.44.23.88.00, Web : www.escom.fr.
- **ESEO Angers**
  4, rue Merlet-de-la-Boulaye, BP 30926, 49009 Angers cedex 01, tél. 02.41.86.67.67, Web : www.eseo.fr
- **HEI Lille**
  Hautes études d'ingénieur, 13, rue de Toul, 59046 Lille cedex, tél. 03.28.38.48.58, Web : www.hei.fr.
- **ICAM Lille**
  Institut catholique d'arts et métiers, 6, rue Auber, 59046 Lille cedex, tél. 03.20.22.61.61, Web : www.icam.fr.
- **ICAM Nantes**
  Institut catholique d'arts et métiers, 35, av. du Champ-de-Manoeuvres, 44470 Carquefou, tél. 02.40.52.40.52, Web : www.icam.fr.
- **ICAM Toulouse**
  Institut catholique d'arts et métiers, 75, av. de Grande-Bretagne, 31300 Toulouse, tél. 05.34.50.50.50, Web : www.icam.fr.
- **INSTITUT POLYTECHNIQUE LaSalle Beauvais**
  rue Pierre-Waguet, BP 30313, 60026 Beauvais cedex, tél. 03.44.06.25.25, Web : www.lasalle-beauvais.fr.
- **ISA Lille**
  Institut supérieur d'agriculture, 48, bd Vauban, 59046 Lille, tél. 03.28.38.48.48, Web : www.isa-lille.fr.
- **ISARA Lyon**
  Institut supérieur d'agriculture et d'agroalimentaire Rhône-Alpes, 23, rue Jean-Baldassini, 69364 Lyon cedex 07, tél. 04.27.85.85.85, Web : www.isara.fr.
- **ISEN Brest**
  Institut supérieur de l'électronique et du numérique de Brest, 20, rue Cuirassé-Bretagne, CS 42807, 29228 Brest cedex 2, tél. 02.98.03.84.00, Web : www.isen.fr.
- **ISEN Lille**
  Institut supérieur de l'électronique et du numérique de Lille, 41, bd Vauban, 59046 Lille cedex, tél. 03.20.30.40.50, Web : www.isen.fr.
- **ISEN Toulon**
  Institut supérieur de l'électronique et du numérique de Toulon, Maison des technologies, place Georges-Pompidou, 83000 Toulon, tél. 04.94.03.89.50.
- **ISEP Paris**
  Institut supérieur d'électronique de Paris, 28, rue Notre-Dame-des-Champs, 75006 Paris, tél. 01.49.54.52.00, 01.49.54.52.43, Web : www.isep.fr.

Les écoles du GEIPI-POLYTECH

Le GEIPI-Polytech (Groupement d'écoles d'ingénieurs publiques à parcours intégré) rassemble 23 écoles universitaires qui recrutent des bacheliers S sur concours commun. Ces écoles ont représenté, au total, un volume de 1 700 places pour la session de recrutement 2009.

Vous pouvez vous informer sur le concours sur Internet (www.geipipolytech.org) ou auprès du service concours du GEIPI-Polytech (ESSTIN, 2, rue Jean-Lamour, 54519 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, tél. 03.83.68.50.50). Pour vous inscrire, il faut passer par le site national www.admission-postbac.org. Le coût du concours GEIPI-Polytech était de 70 € en 2009 quel que soit le nombre d'écoles choisies.

Pas d'impasse sur la culture générale

Le concours d'entrée dans ces écoles se compose de deux épreuves d'une durée chacune de trois heures (dont une est commune avec les ENI), comprenant à chaque fois des mathématiques et de la physique-chimie, et d'un entretien. Le programme des épreuves correspond à celui de l'année de terminale, mais les écoles du GEIPI-Polytech apprécient également les candidats qui possèdent une bonne connaissance de l'environnement scientifique. Ces acquis sont vérifiés notamment au sein de l'épreuve de physique qui comprend des questions de culture générale scientifique. Vous trouverez des annales sur le site du GEIPI-Polytech.

À SAVOIR **Les places au concours GEIPI-Polytech'**

Le tableau ci-dessous récapitule le nombre de places offertes au concours GEIPI-Polytech en 2009, au sein des 23 écoles.

Ecoles	Places	Ecoles	Places
Agrosup Dijon	10	Polytech' Clermont-Ferrand	80
ESIREM Dijon	10	Polytech' Grenoble	60
ISAT Nevers	80	Polytech' Lille	80
ISEL Le Havre	40	Polytech' Marseille	90
ISTIA Angers	48	Polytech' Montpellier	140
ISTY Versailles	40	Polytech'Nantes	90
EEIGM Nancy	55	Polytech' Nice-Sophia	90
ENSGSI Nancy	40	Polytech' Orléans	90
ESSTIN Nancy	140	Polytech' Paris-UMPC	120
Institut Galilée Villetaneuse	50	Polytech' Savoie	60
Telecom Lille	115	Polytech' Tours	90
Telecom Saint-Étienne	40	TOTAL GENERAL	1 700

À noter que les « bons élèves » (ceux qui ont au moins 15 de moyenne en mathématiques et en physique et sont bons en anglais et en français) sont dispensés de passer les épreuves du concours. Pour ce faire, il suffit de fournir un dossier comprenant notamment vos notes de première et de terminale. Si vous obtenez, après examen du dossier par un jury, plus de 1500 points, vous serez admis d'office.

Liste des écoles

- **AGROSUP Dijon**
  Institut national supérieur des sciences agronomiques, de l'alimentation et de l'environnement, campus universitaire, 1, esplanade Erasme, 21000 Dijon, tél. 03.80.39.66.01, Web : www.ensbana.fr.
- **EEIGM Nancy**
  École européenne d'ingénieurs en génie des matériaux, 6, rue Bastien-Lepage, BP 630, 54010 Nancy cedex, tél. 03.83.36.83.00, Web : www.eeigm.inpl-nancy.fr.
- **ENSGSI Nancy**
  École nationale supérieure en génie des systèmes industriels, 8, rue Bastien-Lepage, BP 90647, 54010 Nancy cedex, tél. 03.83.19.32.32, Web : www.ensgsi.inpl-nancy.fr.
- **ESIREM Dijon**
  École supérieure d'ingénieurs de recherche en matériaux, 9, av. Alain-Savary, aile des sciences de l'ingénieur, bât. Mirande, BP 47870, 21078 Dijon cedex, tél. 03.80.39.60.09, Web : www.u-bourgogne.fr/ESIREM.
- **ESSTIN Nancy**
  École supérieure des sciences et technologies de l'ingénieur de Nancy, 2, rue Jean-Lamour, 54519 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, tél. 03.83.68.50.00, Web : www.esstin.uhp-nancy.fr.
- **INSTITUT GALILÉE VILLETANEUSE**
  99, av. Jean-Baptiste-Clément, 93430 Villetaneuse, tél. 01.49.40.30.00, Web : www.sup-galilee.univ-paris13.fr.
- **ISAT Nevers**
  Institut supérieur de l'automobile et des transports, 49, rue Mademoiselle-Bourgeois, BP 31, 58027 Nevers cedex, tél. 03.86.71.50.00, Web : www.isat.fr.
- **ISEL Le Havre**
  Institut supérieur d'études logistiques, quai Frissard, BP 1137, 76063 Le Havre cedex, tél. 02.32.74.49.00, Web : www.univ-lehavre.fr/enseign/isel.
- **ISTIA Angers**
  Institut des sciences et techniques de l'ingénieur d'Angers, 62, av. Notre-Dame-du-Lac, 49000 Angers, tél. 02.41.22.65.00, Web : www.istia.univ-angers.fr.
- **ISTY Versailles**
  Institut des sciences et techniques des Yvelines, 45, av. des États-Unis, 78035 Versailles cedex, tél. 01.39.25.45.85, Web : www.isty.uvsq.fr.
- **POLYTECH'Clermont-Ferrand**
  Centre universitaire des sciences et techniques de l'université Clermont-Ferrand 2, campus des Cézeaux, 24, av. des Landais, BP 206, 63174 Aubière cedex, tél. 04.73.40.75.00, Web : www.polytech-clermontferrand.fr.

- **POLYTECH'Grenoble**
  École polytechnique de l'université Grenoble 1, 28, av. Benoît-Frachon, Saint-Martin-d'Hères, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, tél. 04.76.82.79.02, Web : www.polytech-grenoble.fr.
- **POLYTECH'Lille**
  École polytechnique universitaire de Lille, av. Paul-Langevin, 59655 Villeneuved'Ascq cedex, tél. 03.28.76.73.00, Web : www.polytech-lille.fr.
- **POLYTECH'Marseille**
  École polytechnique universitaire de Marseille, 60, rue Frédéric-Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, tél. 04.91.11.26.56, Web : www.polytech-marseille.com.
- **POLYTECH'Montpellier**
  École polytechnique universitaire de Montpellier, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, tél. 04.67.14.31.60, Web : www.polytech.univ-montp2.fr.
- **POLYTECH'Nantes**
  École polytechnique de l'université de Nantes, site de la Chantrerie, rue Christian-Pauc, BP 50609, 44306 Nantes cedex 3, tél. 02.40.68.32.00, Web : www.polytech.univ-nantes.fr.
- **POLYTECH'Nice**
  École polytechnique de l'université de Nice Sophia-Antipolis, 930, route des Colles, BP 145, 06903 Sophia-Antipolis cedex, tél. 04.92.96.50.50, 04.92.96.51.23, Web : www.polytechnice.fr.
- **POLYTECH'Orléans**
  École polytechnique de l'université d'Orléans, 8, rue Léonard-de-Vinci, 45072 Orléans cedex 2, tél. 02.38.41.70.50, Web : www.univ-orleans.fr/polytech.
- **POLYTECH'Paris**
  École polytechnique universitaire Pierre-et-Marie-Curie, Paris 6, 4, place Jussieu, bât. Esclangon, case courrier 135, 75252 Paris cedex 05, tél. 01.44.27.13.13, Web : www.polytech.upmc.fr.
- **POLYTECH'Savoie**
  École polytechnique universitaire de Savoie, campus universitaire d'Annecy-le-Vieux, BP 80439, 74944 Annecy-le-Vieux cedex, tél. 04.50.09.66.00, Web : www.polytech.univ-savoie.fr.
- **POLYTECH'Tours**
  École polytechnique de l'université de Tours,
  - département aménagement, 35, allée Ferdinand-de-Lesseps, 37200 Tours, tél. 02.47.36.14.50.
  - département informatique, 64, av. Jean-Portalis, 37200 Tours, tél. 02.47.36.14.14.
  - départements électronique et systèmes de l'énergie électrique, mécanique et conception des systèmes, 7, av. Marcel-Dassault, 37200 Tours, tél. 02.47.36.13.00,

  Web : www.polytech.univ-tours.fr.
- **TELECOM Lille**
  Cité scientifique, rue Guglielmo-Marconi, BP 20145, 59653 Villeneuve-d'Ascq cedex, tél. 03.20.33.55.77, Web : www.telecom-lille1.eu.
- **TELECOM Saint-Étienne**
  21-23, rue du Docteur-Paul-Michelon, 42023 Saint-Etienne cedex 2, tél. 04.77.48.50.00, Web : www.telecom-st-etienne.fr.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les autres écoles recrutant par concours

En dehors des concours communs de recrutement accessibles aux bacheliers, il reste de nombreuses possibilités d'intégrer des écoles qui recrutent de manière individuelle, sur dossier, épreuves, entretien... Elles assurent toutes un cursus en cinq ans qui permet d'obtenir un diplôme d'ingénieur reconnu par la CTI.

- **ECE Paris**
  École centrale d'électronique, 37, quai de Grenelle, immeuble Pollux, 75725 Paris cedex 15, tél. 01.44.39.06.00, Web : www.ece.fr.
- **EFREI Paris**
  École d'ingénieurs des technologies de l'information et du management, 30-32, av. de la République, 94815 Villejuif cedex, tél. 01.46.77.64.67, Web : www.efrei.fr.
- **EPF-ÉCOLE D'INGÉNIEURS Sceaux**
  3 bis, rue Lakanal, 92330 Sceaux, tél. 01.41.13.01.51.
- **EPITA Le Kremlin-Bicêtre**
  École pour l'informatique et les techniques avancées, 14-16, rue Voltaire, 94276 Le Kremlin-Bicêtre cedex, tél. 01.44.08.01.01, Web : www.epita.fr.
- **ESIEA Laval**
  ESIEA – Grande école d'ingénieurs, parc universitaire de Laval-Changé, 38, rue des Docteurs-Calmette-et-Guérin, BP 0339, 53003 Laval cedex, tél. 02.43.59.24.24.
- **ESIEA Paris**
  ESIEA – Grande école d'ingénieurs, 72, av. Maurice-Thorez, 94200 Ivry-sur-Seine, tél. 01.43.90.21.21, Web : www.esiea.fr.
- **ESIEE Amiens**
  École supérieure d'ingénieurs en électronique et électrotechnique, 14, quai de la Somme, BP 100, 80082 Amiens cedex 02, tél. 03.22.66.20.00, Web : www.esieeamiens.fr.
- **ESIEE Paris**
  Cité Descartes, BP 99, 93162 Noisy-le-Grand cedex, tél. 01.45.92.65.00, Web : www.esiee.fr.
- **ESILV Paris-La Défense**
  École supérieure d'ingénieurs Léonard-de-Vinci, Pôle universitaire Léonard-de-Vinci, 92916 Paris-La Défense cedex, tél. 01.41.16.71.03, Web : www.esilv.fr.
- **ESME SUDRIA Paris**
  38, rue Molière, 94200 Ivry-sur-Seine, tél. 01.56.20.62.00, Web : www.esme.fr.

Ces informations sont extraites du guide *Bien choisir son école d'ingénieurs* édition 2010 publié par L'Etudiant et disponible en librairie.

Raisonner juste

1

Thèmes du chapitre

Validité de raisonnements proposés.

Des savoir-faire à maîtriser

- Un raisonnement par récurrence sert à démontrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend de n entier naturel.

Il y a toujours deux étapes :

1) l'initialisation, qui consiste à vérifier que la propriété est vraie au départ ($n = 0$ ou $n = 1$) ;

2) l'hérédité, qui consiste à démontrer que si la propriété est vraie à un rang quelconque, elle est alors vraie au rang suivant.

Si une seule des deux étapes manque, le raisonnement n'est pas valide.

- Il faut bien distinguer « il faut » et « il suffit ».

« Pour qu'une proposition p soit vraie, il faut que q soit vraie » signifie que p entraîne q ;

« Pour qu'une proposition p soit vraie, il suffit que q soit vraie » signifie que q entraîne p.

Des réflexes à avoir

- Si la conclusion d'un raisonnement compliqué est fausse (par exemple $\sqrt{2}$ rationnel), inutile de lire le détail, le raisonnement est faux !
Vous pourrez chercher pourquoi en dehors du temps limité du concours.

- Dans le cas de l'affirmation d'une propriété générale, un exemple peut être utile pour comprendre, mais ne prouve rien, un contre-exemple prouve que la propriété générale est fausse.

1 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit X, Y et Z trois ensembles non vides de réels. Sachant que :

- aucun élément de X n'est négatif ;
- aucun élément de Y n'admet de racine carrée réelle ;
- tout élément de Z est supérieur ou égal à 1 ;

on peut en déduire :

a) Aucun élément de X n'appartient à Y.

b) Aucun élément de Z n'appartient à Y.

c) Tout réel qui n'appartient pas à Y appartient à X.

d) Pour qu'un réel appartienne à X et à Z, il faut qu'il soit positif.

e) Pour qu'un réel appartienne à X et à Z, il suffit qu'il soit supérieur ou égal à 1.

2 EPF 2006

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Parmi les trois démonstrations suivantes, lesquelles sont correctes ? Si une démonstration vous paraît incorrecte, vous justifierez votre réponse.

a) On suppose qu'il a été démontré dans une question précédente que le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ est égal à 0.

On sait que, si $(MN) \perp (PQ)$, alors $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$. Donc, comme $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, on en déduit $(MN) \perp (PQ)$.

b) On sait que, dans un tube à vide, une bille de plomb et une plume tombent à la même vitesse dans le champ de gravitation.

On considère un tube et on constate que, en lâchant simultanément dans ce tube une plume et une bille de plomb, la plume tombe plus lentement que la bille de plomb : on en déduit que le tube n'est pas vide.

c) Dans une entreprise, on a calculé que le bénéfice procuré par la production de n milliers d'articles est égal à $(n^3 - 45n^2 + 600n + 30\,000)$ €.

La production maximale par jour est de 20 000 articles.

Pour trouver le bénéfice maximal pouvant être obtenu par jour, on remplace n par 20 000 dans l'expression $n^3 - 45n^2 + 600n + 30\,000$.

2. Que pensez-vous du raisonnement suivant ? Soyez précis dans votre réponse.

« Deux points du plan sont toujours alignés. Supposons que, pour un certain entier n supérieur ou égal à 2, n points du plan soient toujours alignés. Prenons alors

$n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de ce plan. D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite $\triangle$, et de même les n points $A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite $\triangle'$.

Les droites $\triangle$ et $\triangle'$ sont confondues puisqu'elles ont en commun les points $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Les $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont donc alignés.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, n points d'un plan sont toujours alignés, ce qui signifie que tous les points du plan sont alignés. »

3 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

On considère six plaques numérotées de 1 à 6. Chacune des deux faces est peinte d'une seule couleur choisie parmi les quatre couleurs suivantes : Noire, Rouge, Vert et Jaune (respectivement notées sur le dessin N, R, V et J).

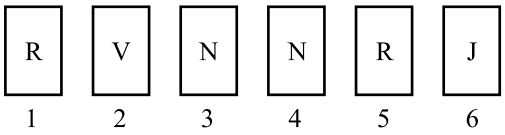

Figure 1.1

On dispose ces six plaques sur une table (une seule face est donc apparente).

On peut retourner une ou plusieurs plaques, et dans ce dernier cas les plaques sont retournées simultanément.

On considère les énoncés :

P : Si une plaque a une face rouge, alors son autre face est verte.

Q : Pour qu'une plaque ait une face noire, il suffit qu'elle ait une face jaune.

a) Pour savoir si P est vrai, il suffit de retourner les plaques 1,2,5.

b) Pour savoir si P est vrai, il faut retourner les plaques 1,2,5.

c) Pour savoir si P est vrai, il faut retourner les plaques 1,3,4,5,6.

d) Pour savoir si Q est vrai, il faut retourner la plaque 6.

e) Pour savoir si Q est vrai, il suffit de retourner la plaque 6.

4 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

a) Afin de résoudre l'inéquation $e^x - 2e^{-x} < 0$, on utilise le raisonnement suivant :

« Si x est une solution, alors $x \in \mathbb{R}$ et on a $e^x - \dfrac{2}{e^x} < 0$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$ donne $X - \dfrac{2}{X} < 0$, soit $\dfrac{X^2 - 2}{X} < 0$.

Or on a $X = \mathrm{e}^x > 0$. Il faut donc $X^2 - 2 < 0$, soit aussi $\left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right) < 0$.

On en déduit $-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}$, donc $-\sqrt{2} < \mathrm{e}^x < \sqrt{2}$.

ln étant une fonction croissante, on obtient $x < \ln 2$.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes. Solution : $x < \ln 2$. »

Ce raisonnement est exact.

b) On considère la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ par : } \quad u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{8}\cdot$$

On désigne par C la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{8}$$

et on désigne par $\triangle$ la droite d'équation $y = x$.

Afin de construire les quatre premiers termes de la suite u, on a réalisé la construction ci-dessous.

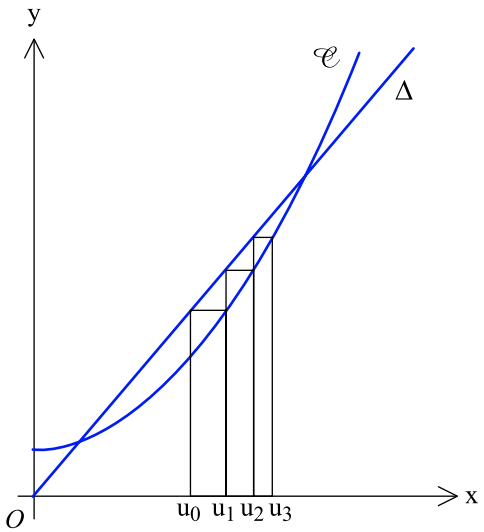

Figure 1.2

Cette construction est exacte.

c) On considère la suite u et la fonction f présentées à l'item **b.** Afin de montrer que u est croissante, on utilise le raisonnement par récurrence suivant :

« Soit $P(n)$ l'inéquation : $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$.

Initialisation : on a $u_1 \geqslant u_0 \geqslant 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P(p)$ soit vraie. Alors $u_{p+1} \geqslant u_p \geqslant 0$.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ne prend que des valeurs positives, alors $f\left(u_{p+1}\right) \geqslant f\left(u_p\right) \geqslant f(0)$, soit $u_{p+2} \geqslant u_{p+1} \geqslant 0$.

Donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : de ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, je déduis que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$, ce qui prouve que u est croissante. »

Ce raisonnement est exact.

d) On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}.$$

On cherche à savoir si la courbe $\mathcal{C}$ représentant f possède une tangente au point $A(1;0)$. On utilise pour cela le raisonnement suivant :

« Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A est donnée par

$$y = (x-1)f'(1) + f(1).$$

Or on a $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$, donc $f'(1)$ n'existe pas et f n'est pas dérivable en 1.

On en déduit que $\mathcal{C}$ ne possède pas de tangente en A. »

Ce raisonnement est exact.

5 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

a) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty]$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On cherche à savoir si f est dérivable en 0 ou non. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est le produit de la fonction $x \mapsto x$ avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Ces deux fonctions sont définies et continues sur $[0;+\infty[$, mais la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Il s'ensuit que f n'est pas dérivable en 0 en tant que produit de deux fonctions dont l'une n'est pas dérivable en 0. »

Ce raisonnement est exact.

b) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \text{ entier, par } u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On admet que cette suite est correctement définie (c'est-à-dire que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$) et qu'elle est convergente. On appelle l sa limite. On cherche à savoir si l est un nombre rationnel ou non. Pour cela on tient le raisonnement suivant :

« Soit $P(n)$ la phrase « u_n est un nombre rationnel ».

Initialisation : $u_0 = 1$ est un nombre rationnel donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P(p)$ soit vraie. Montrons que $P(p+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence u_p est un nombre rationnel. Il en est donc de même de $\dfrac{2}{u_p}$ car la somme et le produit de deux rationnels et un rationnel. Donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : de ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence je déduis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

l est alors la limite d'une suite de nombres rationnels, donc l est lui-même un nombre rationnel. »

Ce raisonnement est exact.

c) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère les points $A(1;0;-1)$, $B(4;3;0)$ et $C(7;-1;1)$.

On veut prouver que A, B et C déterminent un plan. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On a $\overrightarrow{AB}(3;3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(6;-1;2)$. Il s'ensuit : $AB = \sqrt{19}$, $AC = \sqrt{41}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 17$.

Comme $AB \times AC \neq |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|$, c'est que les points A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils déterminent un plan. »

Ce raisonnement est exact.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(\sin x)$ où E désigne la fonction « partie entière ».

On cherche la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie dans un voisinage de 0. On utilise le changement de variable $X = \sin x$; on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$.

Par suite, et d'après le théorème de composition des limites, on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} E(X) = 0$. »

Ce raisonnement est exact.

6 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

a) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On veut prouver que la suite u est convergente.

On considère pour cela le raisonnement suivant :

« Je choisis $m = 0$ et $M = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1;n]$, on a $t^2 \geqslant t$, donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Il s'ensuit que $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant u_n \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n$

soit enfin $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} \leqslant 1$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite apparaît bornée par $m = 0$ et $M = 1$.

Soit de plus $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1;n]$.

u_n représente donc l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$, $x = n$, $y = 0$ et la courbe représentant cette fonction.

Cette aire augmente quand n augmente, ce qui se traduit par le fait que la suite u est croissante.

Conclusion : u est croissante et majorée par 1 donc la suite u est convergente. »

Ce raisonnement est exact.

b) Soit f la fonction définie sur $[0;\ln 2]$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

On cherche à calculer l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = \ln 2$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$.

On considère pour cela le raisonnement suivant (et le renseignement $\ln 2 \approx 0{,}7$) :

« La fonction F définie par $F(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $[0;\ln 2]$.

F est en effet dérivable sur $[0;\ln 2]$ et

$$F'(x) = 2\,\mathrm{e}^x + (2x-3)\,\mathrm{e}^x = (2x-1)\,\mathrm{e}^x.$$

On a :

$$\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(2x-3)\,\mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 3)\times 2 - (-3) = 4\ln 2 - 3 \approx -0{,}2.$$

Comme le résultat est négatif, c'est que l'aire cherchée est la valeur absolue de ce résultat, soit 0,2 unité d'aire ».

Ce raisonnement est exact.

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{10}$. On cherche une approximation de $f(0{,}001)$. On considère pour cela le raisonnement suivant :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

« f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour x réel, $f'(x) = 10(1 + x)^9$ et la courbe représentant f possède une tangente au point d'abscisse 0, d'équation :

$$y = xf'(0) + f(0), \quad \text{soit} \quad y = 10x + 1.$$

On en déduit que $f(0{,}001) \approx 10 \times 0{,}001 + 1$, soit $f(0{,}001) \approx 1{,}01$. »

Ce raisonnement est exact.

d) Soit D l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\sin x \neq 0$. Soit f la fonction définie sur D par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. On veut prouver que f est décroissante sur D. On considère pour cela le raisonnement suivant :

« f est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont dérivables sur D et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. On en déduit que f est dérivable sur D.

Pour $x \in D$, on a $f'(x) = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Pour tout $x \in D$, on a $f'(x) < 0$. Comme le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction, c'est que f est strictement décroissante sur D. »

Ce raisonnement est exact.

Corrigés

1

a.	b.	c.	d.	e.
V	V	V	V	V

Traduisons les conditions énoncées :

$$\begin{aligned} x \in X &\implies x \geqslant 0 \\ y \in Y &\implies y < 0 \\ z \in Z &\implies z \geqslant 1 \end{aligned}$$

a) Si x appartient à X, alors $x \geqslant 0$. Il ne peut donc pas appartenir à Y.
b) Si z appartient à Z, il ne peut pas appartenir à Y.
c) Si y n'appartient pas à Y, alors $y \geqslant 0$ et $y \in X$.
d) Si x appartient à X et à Z, il vérifie $x \geqslant 1$. Il faut donc qu'il soit positif (mais ça ne suffit pas !).
e) La condition $x \in X \cap Z$ équivaut à $x \geqslant 1$.

2

1. a) La structure du raisonnement est fausse : le théorème utilisé pour aboutir à la conclusion est la réciproque du théorème invoqué.
b) L'information est du type « si vide, alors même chute ». Comme la chute n'est pas la même, le tube n'est pas vide. Le raisonnement est exact.
c) La démonstration est fausse : la conclusion suppose que le bénéfice est une fonction croissante de n, ce qui n'est pas le cas.
2. Comme la conclusion est fausse, il y a une erreur quelque part !
Pour pouvoir dire que les droites $\triangle$ et $\triangle'$ sont confondues puisqu'elles ont $n - 1$ points communs, il est nécessaire que $n > 2$. En effet, pour $n = 2$, l'affirmation est fausse car on ne connaît alors qu'un seul point commun à $\triangle$ et $\triangle'$.
C'est donc l'initialisation du raisonnement par récurrence qui n'est pas vérifiée et le raisonnement est donc faux.

3

a.	b.	c.	d.	e.
V	F	F	V	V

a) Pour savoir si P est vraie, il faut contrôler toutes les plaques dont la face visible est rouge, c'est-à-dire les plaques 1 et 5.
Si on retourne les plaques 1, 2, 5, on a donc une condition suffisante (mais pas nécessaire).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) c) Pour savoir si P est vraie, il n'est pas nécessaire de retourner les plaques autres que 1 et 5. Les affirmations sont donc fausses.

d) e) La proposition Q signifie que, lorsqu'une plaque a une face jaune, l'autre face est toujours noire.

Pour contrôler cette proposition il est nécessaire et suffisant de retourner la plaque 6.

Les affirmations sont donc vraies.

4

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	F	V

a) Le raisonnement, suivi pas à pas, est exact.

Mais vous pouvez aller plus vite :

$$e^x - 2e^{-x} < 0 \iff e^x < 2e^{-x} \iff e^{2x} < 2 \iff 2x < \ln 2 \iff x < \frac{1}{2}\ln 2.$$

Comme c'est la conclusion annoncée, vous pouvez cocher **V** sans trop de risque !

b)

Comparez les deux premier termes de la suite.

On a $u_0 = \frac{1}{2}$ puis $u_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

On a donc $u_1 < u_0$, alors que la figure indique le contraire.

En temps libre, vous pouvez rectifier la figure.

La valeur $u_1 = f(u_0)$ est l'ordonnée du point d'abscisse u_0 et situé sur la courbe $\mathcal{C}$.

Puis cette valeur est ramenée sur l'axe des abscisses en s'appuyant sur la bissectrice d'équation $y = x$.

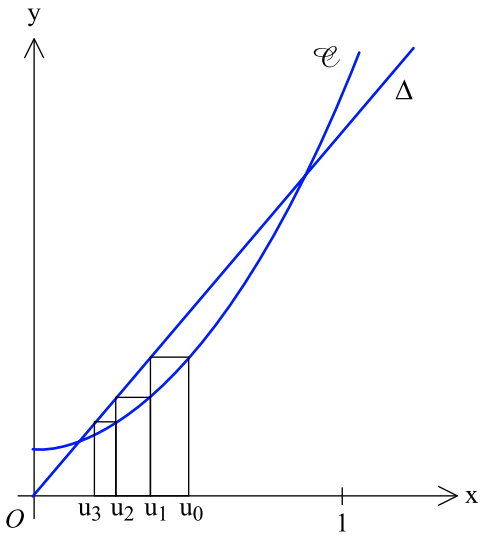

Figure 1.3

c)

- Pour démontrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ par récurrence, il faut, à la fois, qu'elle soit vraie au départ, et qu'on puisse passer d'un rang quelconque au rang suivant.

On a déjà constaté que $u_0 < u_1$. L'initialisation étant fausse, il est inutile de lire la suite.

d) Effectivement, la fonction f n'est pas dérivable en 1. Cependant :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x-1} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}} \quad \text{si } x > 1$$

entraîne que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc en A une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

La réponse est donc douteuse !

5

a.	b.	c.	d.
F	F	V	F

Corrigés

1 Raisonner juste

a) La conclusion est fausse puisque la limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

existe.

En temps libre, vous pouvez réfléchir à l'erreur commise :
Avec f dérivable en 0 et g non dérivable en 0, ce qui est connu, c'est $f+g$ non dérivable en 0. Il n'y a aucune conclusion relative au produit fg.
C'est la confusion entre la somme et le produit que l'exercice veut tester.

b)

Vous pouvez répondre sans lire le raisonnement proposé.

Si l désigne la limite, on a :

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{2}{l}\right)\iff l^2=2$$

soit $l=\sqrt{2}$ puisqu'une récurrence évidente montre que $u_n>0$, donc $l\geqslant 0$.
Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, la conclusion est fausse.

Où est l'erreur ? dans la conclusion !
Il n'est pas vrai que la limite d'une suite de nombres rationnels soit toujours rationnelle. Pensez à un nombre irrationnel qui est la limite de la suite de ses approximations décimales.

c)

Vous pouvez conclure plus vite que le raisonnement proposé.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et ils déterminent un plan.

d)

Vous pouvez répondre sans lire le raisonnement proposé. On sait que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, ce qui signifie que $\sin x\approx x$ pour x voisin de 0.

Et l'allure locale de la fonction « partie entière » :

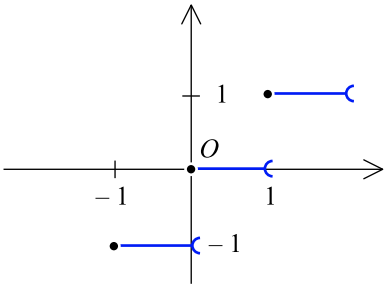

Figure 1.4

montre qu'il n'y a pas de limite en 0.

Le graphique ci-dessus nous aide à comprendre où est l'erreur :

si $X \in [-1, 0[$, on a $E(X) = -1$ et donc $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X<0}} E(X) = -1$;

si $X \in [0, 1[$, on a $E(X) = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} E(X) = 0$.

Les limites à gauche et à droite sont différentes ; donc il n'y a pas de limite.

6

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	F

a) Tout le raisonnement est exact.

On ne peut pas calculer u_n car on ne peut pas exprimer les primitives de e^{-t^2} à l'aide des fonctions usuelles.

D'autre part, la suite u est bien convergente, mais ce raisonnement ne permet pas de connaître sa limite.

b)

Vous pouvez étudier rapidement les variations de f pour avoir une idée sur l'interprétation graphique des calculs effectués.

Sur $[0; \ln 2]$, on a $f'(x) = (2x + 1)\,e^x > 0$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1 Raisonner juste

La fonction f est donc croissante de $f(0) = -1$ à $f(\ln 2) = (2\ln 2 - 1)2 \approx 0{,}8$.

La courbe $\mathcal{C}$ coupe donc l'axe des abscisses (en $x = 0{,}5$) et l'interprétation graphique du résultat du calcul n'est pas celui qui est proposé car une partie de l'aire doit être comptée négativement (pour $x \in [0; 0{,}5]$) et une partie positivement (pour $x \in [0{,}5; \ln 2]$).

c) Tout le raisonnement est exact.

Il correspond au fait qu'au voisinage d'un point, une courbe est proche de sa tangente. Le problème, c'est qu'on ne connaît pas la taille du voisinage !

d) Les étapes du calcul sont justes. Mais la conclusion est fausse.

En effet, déduire de $f' < 0$ que f est décroissante, est vrai sur un intervalle.

Et le domaine de définition D de la fonction f (fonction cotangente) est la réunion d'une infinité d'intervalles.

Calculs avec les réels 2

Thèmes du chapitre

Puissances, valeur absolue.

Équations et inéquations du second degré.

Systèmes d'équations linéaires.

Des savoir-faire à maîtriser

- Pour étudier les racines ou le signe d'un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on calcule $\triangle = b^2 - 4ac$.

Si $\triangle > 0$, l'équation $P(x) = 0$ a deux racines réelles $x_1 < x_2$. $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

Si $\triangle = 0$, l'équation $P(x) = 0$ a une racine réelle x_0. $P(x)$ est toujours du signe de a, sauf en x_0 où il est nul.

Si $\triangle < 0$, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de racine réelle. $P(x)$ est toujours du signe de a.

- La fonction valeur absolue peut se simplifier par intervalles :

$$|u(x)| = u(x) \text{ quand } u(x) \geqslant 0 \ ; \ |u(x)| = -u(x) \text{ quand } u(x) \leqslant 0.$$

Des réflexes à avoir

- On a $\sqrt{u^2(x)} = |u(x)|$; n'oubliez pas la valeur absolue.
- Pour intégrer une fonction comportant des valeurs absolues, distinguez des intervalles où les valeurs absolues peuvent s'enlever.
- Pour le domaine de définition de $\dfrac{1}{u(x)}$,éliminez les racines de l'équation $u(x) = 0$.
- Pour le domaine de définition de $\ln\left[u(x)\right]$, éliminez les racines de l'inéquation $u(x) \leqslant 0$.
- Quand vous multipliez les deux membres d'une inégalité par un nombre c, faites attention au signe de c :

si $c > 0$, l'inégalité est inchangée ; si $c < 0$, l'inégalité change de sens.

1 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

a) $(5x+3)(2x+1)-(2-x)(1-5x)-3(1-x) = 5x^2+18x-2$.

b) $\dfrac{(x-2)^2}{3}+\dfrac{(x-5)(x+4)}{2} = \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6}-\dfrac{20}{3}$.

c) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ alors : $\dfrac{\dfrac{x^2-x-2}{x-1}}{\dfrac{x-1}{x-2}} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

d) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ alors : $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$.

e) Si $x \neq 1$ alors : $\dfrac{\dfrac{x+3}{x-1}-4}{x-1} = -3x+7$.

2 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit $f(x) = 1-3x+x^2$ et $g(x) = \dfrac{x}{1-3x+x^2}$. Alors, pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2},2\right]$:

a) $-1 \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{1}{4}$; **b)** $-\dfrac{5}{4} \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{1}{4}$; **c)** $-x \leqslant f(x) \leqslant x$

d) $g(x) \geqslant -1$; **e)** $g(x) \leqslant -\dfrac{4}{5}x$

3 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit a, b et c trois réels.

a) Si $a > 0$, alors : $\dfrac{a+b^2}{2} \geqslant \sqrt{a}\,b$.

b) Si $a > c$, alors : $b-a > b-c$.

c) Si $\dfrac{a+b}{2} < c < b$, alors : $a < c$.

d) Si $ac < b$ et $a+b < c$, alors $a < c$.

e) Si $0 < c-a < b-c$, alors : $4c^2 \leqslant (a+b)^2$.

4 ECE 2007

Vrai ou faux ?

a) $\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) $\cos\left(\frac{111\pi}{3}\right)=-1$.

c) $\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2}-x^2+3=2x+3 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$.

d) $\left(x+\sqrt{x^2}\right)^2+x\sqrt{x^2}=5x^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$.

5 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On sait que, dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, le système d'équations

$$\begin{cases} 2x-3y &= 1\\ 5x-y &= 9 \end{cases}$$

a pour solution $(2;1)$.

a) Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x^2-3y^2 &= 1\\ 5x^2-y^2 &= 9 \end{cases}$$

a pour unique solution $\left(\sqrt{2};1\right)$.

b) Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{3}{y} &= 1\\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y} &= 9 \end{cases}$$

a pour unique solution $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

c) Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, le système d'équations :

$$\begin{cases} 2\ln x-3\,\mathrm{e}^y &= 1\\ 5\ln x-\mathrm{e}^y &= 9 \end{cases}$$

a pour unique solution $\left(\mathrm{e}^2;0\right)$.

d) Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, le système d'équations :

$$\begin{cases} 2\sin x-3\cos y &= 1\\ 5\sin x-\cos y &= 9 \end{cases}$$

a une infinité de solutions.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Corrigés

2 Calculs avec les réels

1

a.	b.	c.	d.	e.
F	V	F	F	F

Le but de l'exercice est de vérifier la qualité de votre calcul algébrique.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(5x+3)(2x+1)-(2-x)(1-5x)-3(1-x) &= (10x^2+11x+3)-(5x^2-11x+2)-(-3x+3)\\ &= 5x^2+25x-2.\end{aligned}$$

L'égalité annoncée est donc fausse.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifions l'écriture de chacun des deux membres.

$$\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(x-5)(x+4)}{2}=\frac{2(x^2-4x+4)+3(x^2-x-20)}{6}=\frac{5x^2-11x-52}{6}$$

$$\frac{(5x+4)(x-3)}{6}-\frac{20}{3}=\frac{5x^2-11x-12-40}{6}=\frac{5x^2-11x-52}{6}$$

Nous obtenons le même résultat simplifié : l'égalité annoncée est vraie.

c) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ (pour qu'aucun dénominateur ne s'annule), on a :

$$\frac{x^2-x-2}{\frac{x-1}{x-2}}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}\times(x-2)=\frac{(x+1)(x-2)^2}{x-1}.$$

L'égalité annoncée est donc fausse.

d) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ (pour qu'aucun dénominateur ne s'annule), on a :

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2x+1}{(x-1)(x-2)}.$$

L'égalité annoncée est donc fausse.

e) Si $x \neq 1$, on a :

$$\frac{\frac{x+3}{x-1}-4}{x-1}=\frac{x+3-4x+4}{(x-1)^2}=\frac{-3x+7}{(x-1)^2}.$$

L'égalité annoncée est donc fausse.

2

a.	b.	c.	d.	e.
F	F	V	V	V

a) On a :

$$-1 \leqslant f(x) \iff x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \iff (x-1)(x-2) \geqslant 0$$
$$\iff x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[.$$

Cette condition n'est pas vérifiée sur tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. L'affirmation est donc fausse.

b) On a :

$$f(x) \leqslant -\frac{1}{4} \iff x^2 - 3x + \frac{5}{4} \leqslant 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \leqslant 0 \iff x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right].$$

Cette condition n'est pas vérifiée sur tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. L'affirmation est donc fausse.

Vous pouvez aussi répondre aux questions **a)** et **b)** en construisant le tableau de variation de f sur $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

c) ● On a :

$$f(x) \leqslant x \iff x^2 - 4x + 1 \leqslant 0 \iff x \in [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}].$$

Comme $[2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}] \subset \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, la condition est vérifiée.

● D'autre part :

$$-x \leqslant f(x) \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0.$$

La condition est toujours vérifiée.

d) L'expression : $g(x) + 1 = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 1}$ est du signe de

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

On a donc : $g(x) + 1 \geqslant 0 \iff x \in \left]\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right[$.

Comme $\left]\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right[\subset \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, la condition est vérifiée.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

e) Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$, on peut écrire :

$$g(x) \leqslant -\frac{4}{5}x \iff \frac{1}{1-3x+x^2} \leqslant -\frac{4}{5} \iff \frac{1}{1-3x+x^2}+\frac{4}{5} \leqslant 0$$
$$\iff \frac{4x^2-12x+9}{5(x^2-3x+1)} \leqslant 0$$
$$\iff x^2-3x+1<0 \qquad \text{car } 4x^2-12x+9=(2x-3)^2$$
$$\iff x \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$$

La condition est vérifiée.

3

a.	b.	c.	d.	e.
V	F	V	F	F

a) Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a}$ existe, et on a :

$$\frac{a+b^2}{2} \geqslant \sqrt{a}\,b \iff a-2\sqrt{a}\,b+b^2 \geqslant 0 \iff \left(\sqrt{a}-b\right)^2 \geqslant 0,$$

ce qui est toujours vrai.

b) Si $a>c$, alors $-a<-c$, puis $b-a<b-c$.

L'affirmation est donc fausse.

c) Si $\frac{a+b}{2}<c$, on a $a+b<2c$, soit $a<c+c-b$.

Comme, de plus, $c-b<0$, on en déduit : $a<c$.

d) L'affirmation paraît douteuse : tentez votre chance, répondez F.

En temps libre, il faut trouver un contre-exemple (pas évident !). Avec $a=3$, $b=-10$ et $c=-4$, on a bien $ac<b$ et $a+b<c$; et pourtant $a>c$.

e) On déduit des hypothèses que $2c<a+b$.

Mais pour obtenir une inégalité équivalente en élevant au carré, il faudrait que ces nombres soient positifs.

L'affirmation semble douteuse. Mais pour être sûr qu'elle est fausse, il faudrait un contre-exemple.

Avec $a=-2$, $b=1$ et $c=-1$, on a $c-a=1$ et $b-c=2$, donc $0<c-a<b-c$.

Et pourtant $4c^2=4$ et $(a+b)^2=1$.

C'est donc une preuve que l'affirmation est fausse.

4

a.	b.	c.	d.
F	V	F	F

a) On a : $\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \left|\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ car $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.
L'affirmation est fausse.

b) Comme $11 = 3 \times 37$, on a $\cos\left(\frac{111\pi}{3}\right) = \cos(37\pi) = \cos\pi = -1$.
L'affirmation est vraie.

c) On a : $\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2} = |x^2+2x|$.
Si $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$, le premier membre se réduit à :

$$x^2+2x-x^2+3 = 2x+3.$$

Si $x \in [-2;0]$, le premier membre se réduit à :

$$-x^2-2x-x^2+3 = -2x^2-2x+3.$$

L'affirmation est fausse.

d) On a : $\left(x+\sqrt{x^2}\right)^2 + x\sqrt{x^2} = \left(x+|x|\right)^2 + x|x|$.
Si $x \geqslant 0$, cette expression s'écrit : $5x^2$.
Si $x \leqslant 0$, cette expression s'écrit : $-x^2$.
L'affirmation est fausse.

5

a.	b.	c.	d.
F	V	V	F

a) On a : $x^2 = 2$ et $y^2 = 1$, ce qui conduit dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à quatre solutions :

$$\left(\sqrt{2};1\right) \ ; \ \left(\sqrt{2};-1\right) \ ; \ \left(-\sqrt{2};1\right) \ ; \ \left(-\sqrt{2};-1\right)$$

L'affirmation est fausse.

b) On a : $\frac{1}{x} = 2$ et $\frac{1}{y} = 1$, ce qui donne $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.
L'affirmation est vraie.

c) On a : $\ln x = 2$ et $\mathrm{e}^y = 1$, ce qui donne $x = \mathrm{e}^2$ et $y = 0$.
L'affirmation est vraie.

d) On aurait : $\sin x = 2$ et $\cos y = 1$, ce qui est impossible en ce qui concerne le sinus.
L'affirmation est fausse.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3 Fonctions numériques

Thèmes du chapitre

Ensemble de définition, représentation graphique, sens de variation.

Limites, asymptotes.

Fonction continue, fonction dérivable, calcul des dérivées, tableau de variation d'une fonction dérivable, tangente en un point.

Des savoir-faire à maîtriser

- En un point d'abscisse a tel que $f'(a)$ existe, la courbe représentative de f admet une tangente d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a).$$

- Vous savez que, si $f' \geqslant 0$, la fonction f est croissante, et que si $f' \leqslant 0$, la fonction f est décroissante.

Mais attention, ces théorèmes ne sont valables que si on se place sur un intervalle, pas sur une réunion d'intervalles.

- Si un polynôme $P(x)$ est tel que $P(a) = 0$, on peut mettre en facteur $x - a$ dans $P(x)$.

Des réflexes à avoir

- Une fonction f, c'est à la fois la façon d'associer à x un unique $f(x)$, mais c'est aussi un ensemble de départ.

Deux fonctions telles que $f(x) = g(x)$ pour tous les x pour lesquels elles sont toutes les deux définies, mais qui n'ont pas le même ensemble de définition, ne sont pas égales.

C'est un piège souvent proposé à votre attention !

- Pour la recherche d'une limite, factorisez le terme dominant. Dans le cas d'un polynôme, c'est le monôme de plus haut degré quand x tend vers l'infini, et de plus bas degré quand x tend vers 0.

- Dans les limites que vous connaissez, la variable x tend vers 0 (ou vers l'infini). Si x tend vers x_0, ramenez-vous en 0 en posant $u = x - x_0$.

1 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}\cdot$$

A : $\mathcal{D} = \mathbb{R}_*^+$

B : $\mathcal{D} =]1; e[\cup]e; +\infty[$

C : $\mathcal{D} =]2; +\infty[$

D : $\mathcal{D} =]1; +\infty[$

E : $\mathcal{D} =]1; 2[\cup]2; +\infty[$

2 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

La fonction f définie sur $[0; 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2+5x-3}{x^2+6x-7}}$ vérifie :

A : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

B : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0.$

C : f n'a pas de limite quand x tend vers 1.

D : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty.$

E : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot$

3 EPF 2007

On considère un trapèze $ABCD$ tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ ont la même mesure $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Déterminer α pour que le trapèze $ABCD$ ait une aire maximale sachant que les côtés AB, BC et CD mesurent un mètre.

4 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$. On appelle respectivement $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ les courbes représentatives de ces fonctions.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

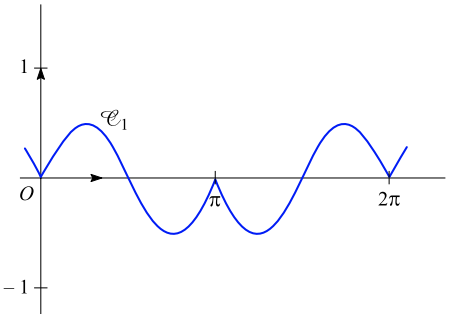

Figure 3.1

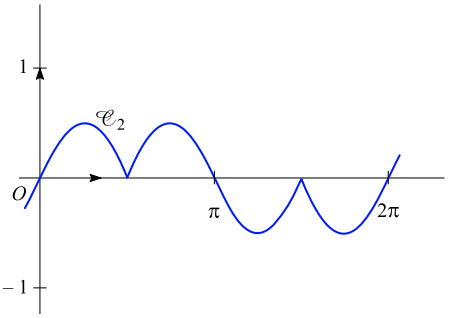

Figure 3.2

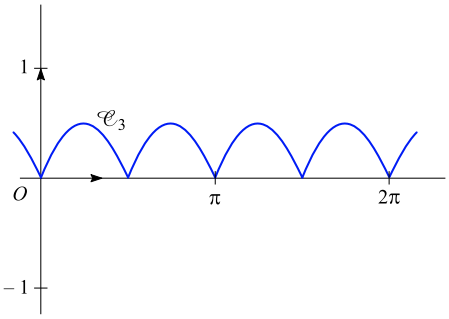

Figure 3.3

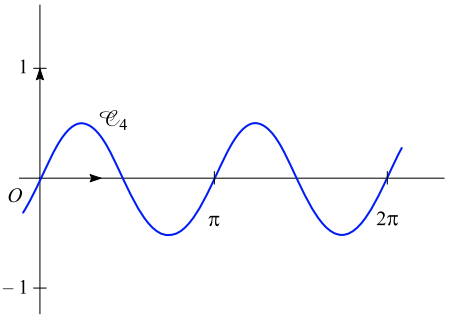

Figure 3.4

a) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = f(x)$.

b) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |k(x)|$.

c) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) = 0$.

d) $\mathcal{C}_4$ représente la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$, associe $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

5 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$. On appellera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentant la fonction f_n dans un repère du plan.

a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, les courbes $\mathcal{C}_n$ possèdent l'axe des ordonnées pour asymptote.

b) Soit $x \in]0;1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$, les courbes $\mathcal{C}_n$ possèdent une tangente commune au point d'abscisse 1.

d) Soit $x \in]1;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_k(x) = \frac{1-x^n}{1-x} \times \ln x$.

6 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle D_f l'ensemble de définition de f.

a) $D_f = \mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{0\,; \dfrac{-2}{3}\right\}$ telle que quel que soit $x \in D_g$, $g'(x) = \dfrac{3}{3x+2} - \dfrac{1}{x}$.

f et g sont égales à une constante additive près.

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = -\dfrac{2}{5}$.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x f(x) = 0$.

7 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (e^x - 2)(e^x + 1)$.

On note $\mathcal{H}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{H}$ au point d'intersction de $\mathcal{H}$ avec l'axe des abscisses.

A : T : $y = x - 2$.

B : T : $y = x + 2$.

C : T : $y = 2(x - \ln 2)$.

D : T : $y = 3x - \ln 6$.

E : T : $y = 6(x - \ln 2)$.

8 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$.

Une des cinq affirmations suivantes est exacte. Laquelle ?

A : g est majorée par 2.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

B : Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

C : Pour tout réel x, on a : $g'(x) < 0$.

D : La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

E : La fonction G définie par : pour tout réel x, $G(x) = 2x + \ln(x^2+1)$ est une primitive de g.

9 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x - 1 \quad ; \quad g(x) = \frac{x \ln x}{x-1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(1) = 1.$$

Alors :

a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) g est continue en 1.

d) g est croissante sur $]0; +\infty[$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

10 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(x+1)$. Alors :

a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) f est croissante sur $[1; +\infty[$.

d) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-1; +\infty[$.

e) L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $]-1; +\infty[$.

11 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x - x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ f(x) = 4 - x + 2x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Alors :

a) f est continue en 0.

b) f est dérivable en 0.

c) f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

d) Pour tout $a \in]-1; 0]$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a$.

e) L'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

12 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé. Alors :

a) f est décroissante sur $]-\infty; -1]$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \big[f(x) + x\big] = 1$.

d) La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

e) La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

13 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - x + 1$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé. Alors :

a) Il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = 0$.

b) f est décroissante sur $]-\infty; -1[$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 0$.

d) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 2$.

e) La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

14 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $f(0) = 0$.

Alors :

a) Nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[f(x) - 2x\big] = 0$.

c) Nécessairement, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [M, +\infty[$, $f(x) > 0$.

d) f peut être définie par $f(x) = 2x + \sin x$.

e) f peut être définie par $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

15 EPF 2008

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en -1 de la fonction f.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0$. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

3. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

5. Donner une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6. Tracer la droite T_0, la courbe $\mathcal{C}_f$, ainsi que les asymptotes.

16 GEIPI-ENI 2007

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b) En déduire que f admet une asymptote $\triangle$ au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

2. a) Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

b) Compléter le tableau des variations de f.

3. a) Déterminer une équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1 de la courbe $\mathcal{C}_f$ et une équation de la tangente T_{-1} au point B d'abscisse -1.

b) Expliquer pourquoi l'on peut affirmer que les tangentes T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires.

4. On se propose d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_{-1}.

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x - \frac{x+3}{\mathrm{e}}\cdot$$

a) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$ où g' et g'' sont les dérivées première et seconde de g.

b) Étudier le signe de g'' et le sens de variation de g'. Préciser la valeur de $g'(-1)$.

Étudier le signe de g'' et le sens de variation de g. Préciser la valeur de $g(-1)$.

Enfin donner le signe de g.

c) Indiquer alors la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T_{-1}.

5. Tracer l'asymptote $\triangle$, les tangentes T_1 et T_{-1} et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Pour tracer ces courbes, on considèrera les valeurs approchées suivantes :

$$\mathrm{e} \approx 2{,}7 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}4.$$

17 GEIPI 2007

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : \qquad x^2 + (1-\mathrm{e}^2)\,\mathrm{e}^x\, x - \mathrm{e}^{2+2x} = 0.$$

1. a) Mettre e^{2x} en facteur dans le membre de gauche de l'équation (E).

b) Déterminer l'expression de X en fonction de x pour que l'équation (E) soit équivalente à l'équation (E') suivante :

$$(E') : \qquad X^2 + (1-\mathrm{e}^2)X - \mathrm{e}^2 = 0.$$

2. a) Déterminer le réel b pour que l'on ait :

$$(1-\mathrm{e}^2)^2 + 4\,\mathrm{e}^2 = (1+b)^2.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Déterminer alors les deux solutions réelles X_1 et X_2 de l'équation (E').

3. En déduire que x est une solution de (E) si, et seulement si, x vérifie une des équations :

$$x = -\mathrm{e}^{g(x)} \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{e}^{h(x)}$$

où g et h sont des fonctions que l'on déterminera. Justifier la réponse.

4. On considère dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$.

a) Par quelle transformation géométrique simple la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $y = -\mathrm{e}^x$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

b) Par quelle transformation géométrique simple la courbe $\mathcal{C}_3$ d'équation $y = \mathrm{e}^{2+x}$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

c) Tracer l'allure des courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

5. Déterminer graphiquement, à l'aide de la question **4.c)**, le nombre de solutions de l'équation (E). Justifier la réponse.

1 **Réponse : E** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)
Pour que $f(x)$ existe, il faut pouvoir calculer le logarithme (soit $x-1>0$ ou $x>1$), et pouvoir effectuer le quotient (soit $\ln(x-1)\neq 0$ ou $x\neq 2$). On a donc :

$$\mathcal{D}=]1;2[\cup]2;+\infty[.$$

2 **Réponse : E** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Il y a un problème de recherche de limite car la valeur 1 annule à la fois le numérateur et le dénominateur de la fraction : factorisez les trinômes.

On a :

$$f(x)=\sqrt{\frac{-2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)(x+7)}}=\sqrt{\frac{-2x+3}{x+7}}\,.$$

La forme indéterminée a disparu. En remplaçant x par 1, on obtient : $\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3 $[AD]$ étant la grande base du trapèze, notons A et D les projetés orthogonaux de A et de D sur la droite (BC).

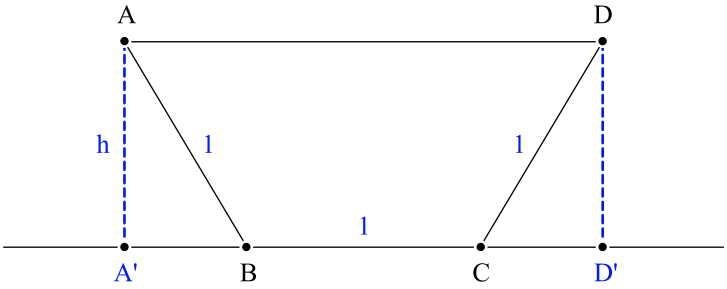

Figure 3.5

L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à :

$$\mathcal{A}=\frac{(AD+BC)\times AA'}{2}\,.$$

Posons $\alpha=\widehat{ABC}=\widehat{DCB}\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Comme $AB = 1$, on a :

$\cos\left(\widehat{A'BA}\right) = \dfrac{A'B}{AB} = A'B = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, et de même $CD' = -\cos\alpha$.

On en déduit : $AD = A'B + BC + CD' = 1 - 2\cos\alpha$.
D'autre part, $\sin\left(\widehat{A'BA}\right) = \dfrac{AA'}{AB} = AA' = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.
L'aire du trapèze s'écrit donc en fonction de α :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha) &= \frac{(1 + 1 - 2\cos\alpha)\sin\alpha}{2} = (1 - \cos\alpha)\sin\alpha \\ &= \sin\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \qquad \text{avec } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].\end{aligned}$$

La fonction $\alpha \mapsto \mathcal{A}(\alpha)$ est dérivable et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(\alpha) &= \cos\alpha - \cos(2\alpha) = \cos\alpha - \left[2\cos^2\alpha - 1\right] \\ &= -2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1 = -2(\cos\alpha - 1)\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$\mathcal{A}'(\alpha)$ est donc du signe de $\cos\alpha + \dfrac{1}{2}$ et on a le tableau de variation :

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\mathcal{A}'(\alpha)$		+	0	−	
$\mathcal{A}(\alpha)$		↗		↘	

L'aire est donc maximale pour $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ et sa valeur maximale est $\mathcal{A}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

4

a.	b.	c.	d.
V	V	V	F

a) La représentation graphique de $x \mapsto g\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ s'obtient à partir de celle de $x \mapsto g(x)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\left(0; -\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Les graphiques disponibles permettent de penser que l'affirmation est vraie.

b) Le graphique de h semble être obtenu à partir de celui de k

- en conservant les parties où $k(x) \geqslant 0$;
- en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour les parties où $k(x) \leqslant 0$.

L'affirmation est donc exacte.

c) En considérant successivement les intervalles $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, l'affirmation semble vraie, toujours en faisant confiance aux graphiques.

d) La courbe $\mathcal{C}_4$ a bien l'allure d'une sinusoïde. Mais les ordonnées varient de $-\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$ et, d'autre part, $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ alors que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'affirmation est donc fausse.

En temps libre, les valeurs où k s'annule et les valeurs extrêmes permettent de penser que $k(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

5

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	F

a) Pour $n \geqslant 2$, on peut écrire :

$$f_n(x) = x^{n-2}\, x \ln x.$$

On sait que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$

et on a : $x^{n-2} = 1$ si $n = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{n-2} = 0$ si $n > 2$.

On a donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_n(x) = 0$, si $n \geqslant 2$.

Les courbes $\mathcal{C}_n$ possèdent donc l'axe des ordonnées pour asymptote.

b)

Attention à bien lire l'énoncé : le réel $x \in]0; 1[$ est fixé ; la limite concerne n.

On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{n-1} = 0$ quand $|x| < 1$, ce qui est le cas ici.

Comme $\ln x$ est fixe, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) On a toujours $f_n(1) = 0$ et de :

$$f_n'(x) = (n-1)\,x^{n-2}\ln x + x^{n-2},$$

on déduit $f_n'(1) = 1$ à condition que $n - 2 > 0$.
Pour $n \geqslant 3$, les courbes $\mathcal{C}_n$ possèdent une tangente commune au point d'abscisse 1.

d) On a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_k(x) = \ln x \sum_{k=2}^{n} x^{k-1}$.
La somme de $n-1$ termes d'une suite géométrique, de raison $x \neq 1$ et de premier terme x, a pour valeur :

$$\sum_{k=2}^{n} x^{k-1} = x\,\frac{1-x^{n-1}}{1-x}\cdot$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_k(x) = x\ln x\,\frac{1-x^{n-1}}{1-x}\cdot$

Le résultat proposé correspond à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Il faut lire attentivement l'énoncé !

6

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	F	V	V

a) La fonction f est définie pour x tel que :

$$\frac{3x+2}{5x} > 0 \iff x\,(3x+2) > 0.$$

Le trinôme $x\,(3x+2)$ a deux racines réelles $-\dfrac{2}{3}$ et 0. Il est positif à l'extérieur des racines, soit :

$$D_f =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]0; +\infty[.$$

b) Les deux fonctions f et g sont égales à une constante additive près si leurs dérivées sont égales.
On obtient bien $f'(x) = \dfrac{3}{3x+2} - \dfrac{1}{x}\cdot$
Mais les ensembles de définition de f et de g sont différents. L'affirmation est donc fausse.

Attention, le piège sur les ensembles de définition revient souvent !

c)

Les limites que vous connaissez supposent que la variable tende vers 0 ou vers l'infini ; donc changez de variable.

Posons $X = x - 1$. On peut alors écrire :

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{X}\ln\left(\frac{3(X+1)+2}{5(X+1)}\right) = \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1+\frac{3}{5}X}{1+X}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{\ln\left(1+\frac{3}{5}X\right)}{\frac{3}{5}X} - \frac{\ln(1+X)}{X}$$

Comme on sait que : $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, on a donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = \dfrac{3}{5} - 1 = -\dfrac{2}{5}$.

d) Pour $x > 0$, on peut écrire :

$$xf(x) = x\ln(3x+2) - x\ln(5x).$$

Sachant que $\lim\limits_{u\to 0} u\ln u = 0$, vous pouvez parier sur la réponse V.

En temps libre, vous pouvez vous ramener au théorème précis du cours avec les transformations :
$xf(x) = x\ln 2 + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}x\,\ln\left(1+\dfrac{3}{2}x\right) - \dfrac{1}{5}\times(5x)\ln(5x).$

7 **Réponse : E** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x :

$$h'(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) + \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x-1).$$

Au point d'intersection de $\mathcal{H}$ avec l'axe des abscisses, on a $y = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x = 2$, ou encore $x = \ln 2$. On a : $h(\ln 2) = 0$ et $h'(\ln 2) = 6$.
La tangente T à $\mathcal{H}$ en ce point admet pour équation :

$$y - h(\ln 2) = h'(\ln 2)\,(x - \ln 2) \quad \text{soit} \quad y = 6(x - \ln 2).$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8 **Réponse : D** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Comme $g(x) \leqslant 2 \iff 2x^2 + 3 \leqslant 2x^2 + 2$ l'affirmation **A** est fausse.

Le calcul $g'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ montre que les affirmations **B** et **C** sont fausses.

Au point d'abscisse 1, on a $g(1) = \dfrac{5}{2}$ et $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$. En ce point, la tangente à la courbe admet pour équation :

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{soit} \quad y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

L'affirmation **D** est donc exacte.

Il est inutile d'aller plus loin puisqu'une seule réponse est exacte. Mais, en temps libre, vous pouvez calculer :

$$G'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}$$

ce qui montre que G n'est pas une primitive de g.

9

a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
V	V	V	V	F

a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout x, sa dérivée :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

est du signe de $x - 1$.

La fonction f est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

Comme $f(1) = 0$, on a bien $f(x) \geqslant 0$ pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$.

b) On peut écrire : $f(x) = x\left[1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right]$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right] = 1$, puis :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

c) La continuité de g en 1 est équivalente à : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \dfrac{x\ln x}{x-1} = 1$.

Pour se ramener à une limite du cours, posons $x = 1+u$.

On a alors à étudier : $\lim\limits_{u\to 0}\left[(1+u)\,\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right]$.

Comme on sait que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, on obtient la limite souhaitée.

d) Sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, la fonction g est dérivable et l'on a :

$$g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\Big[(1+\ln x)(x-1) - x\ln x\Big] = \frac{f(x)}{(x-1)^2}\cdot$$

D'après la question **a)**, on a donc $g'(x) \geqslant 0$, et la fonction g est croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, donc sur $]0;+\infty[$.

e) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}\times\ln x = +\infty$.

10

a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
F	F	V	V	V

La fonction f est bien définie sur $]-1;+\infty[$ car on a toujours $x^2+x+1 > 0$.

a) Comme $\lim\limits_{x\to-1}\ln(x^2+x+1) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1) = -\infty$, on a :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty.$$

b) On peut aussi écrire :

$$f(x) = \ln(x^2+x+1) - \ln\left[(x+1)^2\right] = \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, le quotient tend vers 1 et $f(x)$ tend vers $\ln 1 = 0$.

c) La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{(x^2+x+1)(x+1)}\cdot$$

Sur $[1;+\infty[$, on a donc $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction f est croissante sur cet intervalle.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En utilisant les questions précédentes, on obtient le tableau de variation de f :

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	0

Figure 3.6

Ce tableau montre que les affirmations **d)** et **e)** sont exactes.

11

a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
F	F	F	V	V

a) On a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x-x^2) = 0 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(4-x+2x^2) = 4.$$

Comme ces deux limites sont différentes, la fonction f n'est pas continue en 0.

b) N'étant pas continue, la fonction f ne peut pas être dérivable en 0.

c) Sur $]-\infty;0[$, on a $f'(x) = -1-2x$. Comme cette expression n'est pas toujours négative, la fonction f n'est pas décroissante sur $]-\infty;0]$.

d) Pour répondre à la question, dressons le tableau de variation de f.
Avec ce que l'on sait déjà et $f'(x) = -1+4x$ sur $]0;+\infty[$, on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{31}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$
						4			

Figure 3.7

Pour tout $a \in]-1;0[$, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution.

e) Dans $]-\infty;0]$, l'équation $f(x) = x$ s'écrit :

$$-x - x^2 = x \iff x^2 + 2x = 0 = x(x+2)$$

et admet deux solutions $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$ qui sont bien dans l'intervalle considéré.
Dans $]0;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ s'écrit :

$$4 - x + 2x^2 = x \iff x^2 - x + 2 = 0$$

et n'admet pas de solution réelle car $\triangle < 0$.
En tout, il y a donc bien exactement deux racines réelles.

12

a.	b.	c.	d.	e.
V	F	V	F	V

On a $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ et le trinôme est positif à l'extérieur des racines. La fonction f est bien définie sur $]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$.

a) Comme la fonction racine carrée est croissante, le sens de variation de f est le même que celui de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2x - 3$.
Sur $]-\infty;-1]$, on a $g'(x) = 2x - 2 < 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$.

b) On a : $f(x) = \sqrt{x^2}\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}}$.
Mais attention, on a toujours $\sqrt{x^2} = |x|$ et, quand x est négatif, $|x| = -x$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[-\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}\right] = -1.$$

c) Comme dans la question précédente, quand x est négatif, on a :

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2} = \frac{-2x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{-2x - 3}{-x\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}} - x} = \frac{2 + \dfrac{3}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}} + 1}.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) + x\right] = 1.$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d) Des questions précédentes, il résulte que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $-\infty$, mais que son équation est $y = -x + 1$.

e) En reprenant les questions précédentes dans le cas où x est positif, c'est-à-dire $\sqrt{x^2} = x$, on obient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - x\big] = -1.$$

La droite d'équation $y = x - 1$ est donc bien asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

13

a.	b.	c.	d.	e.
V	V	V	V	V

a) La fonction f est dérivable et, pour tout x réel, $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} - 1$.
On a les équivalences :

$$f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2} \iff 2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \iff x = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Il y a donc bien un unique réel x tel que $f'(x) = 0$.
b) La fonction f est décroissante sur l'intervalle défini par :

$$f'(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Comme $-\dfrac{1}{2}\ln 2 \approx -0{,}35$, la condition est bien satisfaite si on se restreint à $]-\infty; -1[$.
c) La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ln 2; +\infty\right[$.
Sa plus petite valeur est :

$$f\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + 1 \approx 1{,}8.$$

On a donc bien $f(x) \geqslant 0$.
d) Au point d'abscisse 0, on a $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$. La tangente à $\mathcal{C}$ en ce point a pour équation :

$$y = 2 + 1(x - 0) = x + 2.$$

e) Lorsque x tend vers $-\infty$, e^{2x} tend vers 0. On a donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \big[f(x) - (-x + 1)\big] = 0,$$

c'est-à-dire que la droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

14

a.	b.	c.	d.	e.
V	F	V	V	V

a) Lorsque x tend vers $+\infty$, le produit $f(x) \times \dfrac{1}{x}$ tend vers 2 par hypothèse, et on sait que $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0^+.
Il est donc nécessaire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) On a : $$0 = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - 2\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\big(f(x) - 2x\big) \times \frac{1}{x}\right].$$
Cela n'entraîne rien pour le comportement de $f(x) - 2x$.

En temps libre, vous pouvez chercher des exemples qui aboutissent à des conclusions différentes. Les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + \mathrm{e}^{-x} - 1$$

vérifient les conditions imposées, et :

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - 2x\big] = 0 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \big[g(x) - 2x\big] = -1.$$

c) Comme $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 2, il existe $M > 0$ tel que, par exemple :

$$\forall x \in [M, +\infty[\qquad \frac{f(x)}{x} \in [1; 3],$$

ce qui entraîne $f(x) \geqslant 0$.

d) et **e)** Les fonctions conviennent. Mais aucune ne contredit l'affirmation **b)**. Dommage !

15

1. Pour que f existe, il faut $x + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x \in]-1 + \infty[$, ce qui est bien le domaine de définition fourni par l'énoncé. On a :

$$\lim_{x\to-1} (x + 1) = 0 \ ; \ \lim_{x\to-1^+} \ln(x + 1) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to-1} \ln(x + 2) = \ln 1 = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.

b) De $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}\right) = \ln 1 = 0$, on déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big[x + 1\big] = +\infty.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3. On vient de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big[f(x)-(x+1)\big]=0$.
La droite d'équation $y=x+1$ est donc asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

4. La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et, pour tout x, on a :

$$f'(x)=1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=1+\frac{1}{(x+1)(x+2)}>0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.
Ses valeurs croissent de $-\infty$ à $+\infty$.

5. On a : $f(0)=1-\ln 2$ et $f'(0)=\dfrac{3}{2}\cdot$ La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc au point d'abscisse 0 une tangente qui a pour équation :

$$y-(1-\ln 2)=\frac{3}{2}(x-0)\quad\text{soit}\quad y=\frac{3}{2}x+1-\ln 2.$$

6. En $-\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x=-1$. On obtient le graphique :

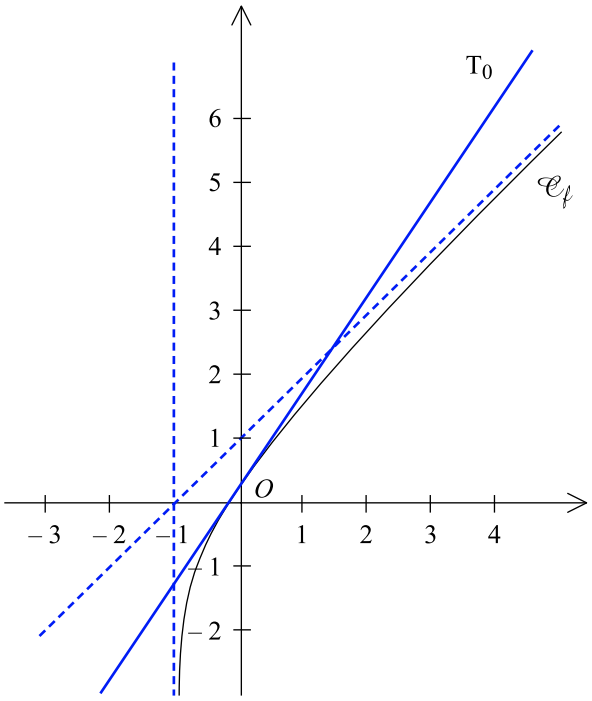

Figure 3.8

16 **1. a)** On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ entraînent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) D'après ce qui précède, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote $\triangle$ d'équation $y = 0$.

2. Du calcul

$$f'(x) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\,\mathrm{e}^x = -x\,\mathrm{e}^x$$

on déduit le tableau des variations de f ci-contre.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

3. a) Au point A d'abscisse 1, on a $f(1) = 0$ et $f'(1) = -\mathrm{e}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc en ce point une tangente T_1 d'équation :

$$y = -\mathrm{e}\,x.$$

Au point B d'abscisse -1, on a $f(-1) = 2\,\mathrm{e}^{-1}$ et $f'(-1) = \mathrm{e}^{-1}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc en ce point une tangente T_{-1} d'équation :

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}x + \frac{3}{\mathrm{e}}\cdot$$

b) Les tangentes T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires car le produit de leurs coefficients directeurs $-\mathrm{e}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est égal à -1.

4. a) On obtient : $g'(x) = -x\,\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $g''(x) = -(1+x)\,\mathrm{e}^x$.

b) En utilisant au passage les valeurs $g'(-1) = 0$ et $g(-1) = 0$, on obtient les informations qui figurent dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $g''(x)$		$+$	0	$-$	
sens de variation de g'		↗	0	↘	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$-$	
sens de variation de g		↘	0	↘	
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Figure 3.9

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) La courbe $\mathcal{C}_f$ est
au-dessus de la tangente T_{-1} quand $g(x) \geqslant 0$, soit quand $x \in]-\infty;-1]$,
au-dessous de la tangente T_{-1} quand $g(x) \leqslant 0$, soit quand $x \in [-1;+\infty[$.

5.

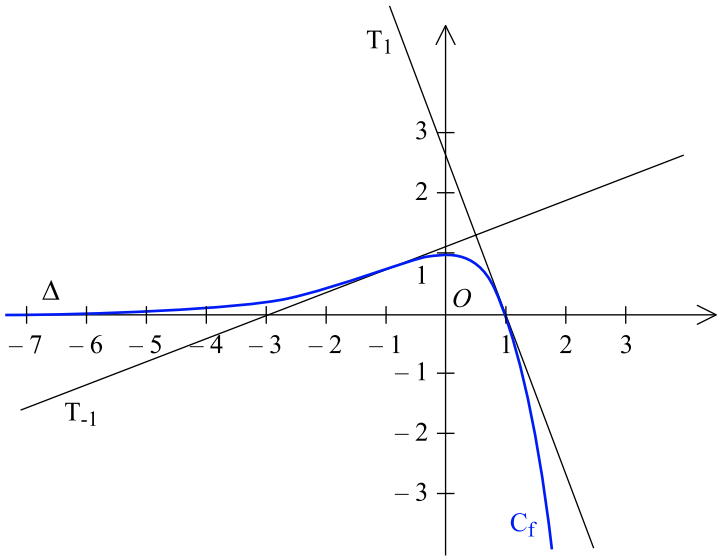

Figure 3.10

17 **1.** En mettant e^{2x} en facteur, l'équation (E) s'écrit :

$$e^{2x}\left[\frac{x^2}{e^{2x}} + (1-e^2)\frac{x}{e^x} - e^2\right] = 0.$$

En posant $X = \dfrac{x}{e^x}$ elle est équivalente à :

$$(E') : \qquad X^2 + (1-e^2)\,X - e^2.$$

2. a) D'une façon générale, on a :

$$(1-x)^2 + 4x = 1 - 2x + x^2 + 4x = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2.$$

On a donc ici l'égalité annoncée avec $b = e^2$.

b) L'équation (E') est du second degré. Son discriminant est :

$$\triangle = (1-e^2)^2 + 4e^2 = (1+e^2)^2.$$

Ses racines sont donc :

$$X_1 = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = e^2.$$

3. À partir de X_1, on obtient :

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x} = -1 \iff x = -\mathrm{e}^x \quad \text{soit} \quad g(x) = x.$$

À partir de X_2, on obtient :

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^2 \iff x = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x+2} \quad \text{soit} \quad h(x) = x + 2.$$

4. a) La courbe $\mathcal{C}_2$ se déduit de la courbe $\mathcal{C}_1$ par la transformation $(x\,;y) \mapsto (x\,;-y)$, c'est-à-dire la symétrie axiale par rapport à (Ox).

b) La courbe $\mathcal{C}_3$ se déduit de la courbe $\mathcal{C}_1$ par la transformation $(x\,;y) \mapsto (x-2\,;y)$, c'est-à-dire la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

c)

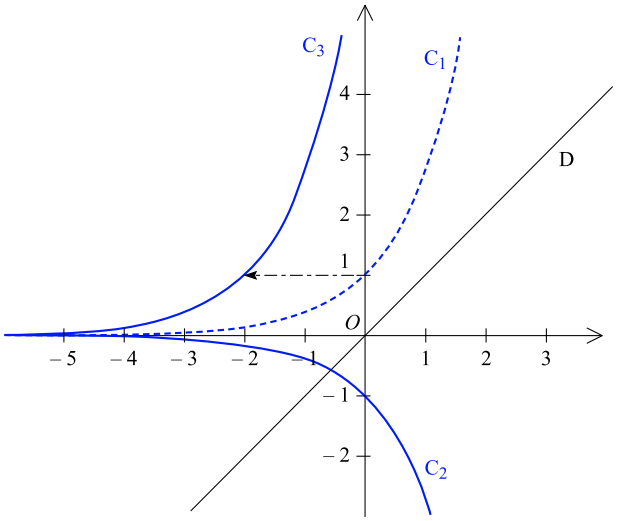

Figure 3.11

5. Une solution x de l'équation (E) correspond à l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la courbe $\mathcal{C}_2$, ou avec la courbe $\mathcal{C}_3$.

Comme la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas la courbe $\mathcal{C}_3$ et ne coupe qu'une seule fois la courbe $\mathcal{C}_2$, l'équation (E) a exactement une solution.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4 Suites numériques

Thèmes du chapitre

Suite monotone, suite bornée.
Suites arithmétiques, suites géométriques.
Convergence.

Des savoir-faire à maîtriser

- Si (u_n) est croissante et majorée par a, elle est convergente et sa limite l vérifie $l \leqslant a$.
- Si (u_n) converge vers l_1, si (v_n) converge vers l_2, et si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors $l_1 \leqslant l_2$. Attention, il n'y a pas de théorème analogue pour des inégalités strictes.
- Théorème d'encadrement :
Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n, et si (u_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite l, alors la suite (v_n) est convergente et a pour limite l.
- Si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, elles sont dites adjacentes. Dans ce cas, elles convergent et ont la même limite.
- Si (u_n) est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, et si f est une fonction croissante sur un intervalle I où se trouvent toutes les valeurs u_n, alors la suite (u_n) est monotone.
Il suffit de comparer les deux premiers termes pour savoir si elle est croissante ou décroissante.

Des réflexes à avoir

- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il faut montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de n.
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de n.
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est croissante, il faut montrer que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n. Mais si $u_n > 0$, vous pouvez aussi montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

1 ECE 2008

Vrai ou faux ?

a) La suite de terme général $(-1)^n \dfrac{n-1}{n+3}$ converge vers 0.

b) La limite de la suite de terme général $\dfrac{\cos n}{e^n+1}$ n'existe pas.

c) La suite de terme général $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$ diverge.

d) La suite de terme général $\dfrac{e^{-n^3+1}}{n+1}$ converge vers 0.

2 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante telle que $u_n \leqslant 1-\dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est :

a) une suite majorée.

b) une suite minorée.

c) une suite divergente.

d) une suite convergente vers 1.

3 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier n, $w_n = \dfrac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$ vérifie :

A : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

B : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

C : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

D : La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

E : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$.

4 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$.

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On admettra que la suite u est bien définie.

a) f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) u est croissante.

c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

d) u est convergente.

5 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$.

On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}.$$

On admettra que les suites u et v sont bien définies.

a) La suite v est géométrique de raison 4.

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5 \times \frac{4^{10} - 1}{3}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{v_n - 1}$.

d) La suite u converge vers -1.

6 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On définit la suite (I_n) pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

a) $I_1 = \dfrac{1}{2}$.

b) La suite (I_n) est croissante.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}\right).$$

d) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, une intégration par parties sur I_n donne $(n-1)^2 I_n = 1 - n\,\mathrm{e}^{1-n}$.

7 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On considère les trois suites u, v et w définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad w_n = v_n - u_n.$$

a) La suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

b) La suite u est croissante.

c) Les suites u et v sont convergentes.

d) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in [u_n, v_n]$.

8 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On considère les suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{-2}{u_n - 3} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.

b) La suite u est convergente.

c) v est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 + 2^n}$.

9 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

On considère une suite réelle v strictement croissante dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $[0; \pi]$.
On définit les suites c et s pour $n \in \mathbb{N}$ par : $c_n = \cos(v_n)$ et $s_n = \sin(v_n)$.

a) La suite v converge vers π.

b) La suite c est croissante.

c) La suite s est périodique.

d) Les suites c et s sont adjacentes si, et seulement si, la suite v converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) u_n.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.

b) La suite u est décroissante.

c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on a $n \geqslant 2$, alors on aura : $0 \leqslant u_n \leqslant 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.

d) La suite u est convergente et de limite nulle.

11 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -28$. Alors :

a) $u_6 = 2$.

b) Il existe un entier m tel que $u_m > m$.

c) Il existe un, et un seul, entier n tel que $u_n\, u_{n+1} < 0$.

d) Il existe un entier p tel que $u_p = 2\,007$.

e) Il existe un entier k tel que $u_1 + u_k = 2\,007$.

12 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout} \quad n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2\sqrt{3}}.$$

On a :

a) (u_n) est croissante.

b) (u_n) est majorée.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = \sqrt{3}$.

e) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geqslant \sqrt{k}$.

13 GEIPI 2007

On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{3}$.

Partie A

On étudie dans cette partie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \quad \text{pour tout } x > 0$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

b) Compléter le tableau des variations de f.

c) En déduire que f admet un minimum m que l'on précisera.

3. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right)$.

b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote $\triangle$ dont on donnera une équation.

4. a) Donner l'expression de $f(x) - x$ en fonction de x.

b) Étudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$, la droite $\triangle$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie B

On rappelle que la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1. En utilisant la partie **A**, montrer, que pour tout entier n, on a :

$$u_n \geqslant \sqrt{3}.$$

2. En utilisant la partie **A** et la question **B.1**, expliquer pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. a) Expliquer alors pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle. On note l cette limite.

b) Justifier que $l = \sqrt{3}$.

14 EPF 2007

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.

a) Calculer S_n et T_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4. On admet que, pour tout $x \geqslant 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad S_n - \dfrac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n$.

5. a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) On admet que la suite (u_n) est convergente et on désigne par l sa limite.

Déduire des questions précédentes que : $\dfrac{5}{6} \leqslant l \leqslant 1$.

15 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ est une suite géométrique de raison q.

Que vaut q ?

A : $q = \dfrac{3}{4}$; **B** : $q = 2$; **C** : $q = -\dfrac{1}{3}$; **D** : $q = \dfrac{1}{5}$; **E** : $q = -2$.

16 ECE 2008

Vrai ou faux ?

a) La suite de terme général $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 1}$ converge vers 1.

b) La limite de la suite de terme général $u_n = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)$ n'existe pas.

c) La suite de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{e^{3n} + n^2}$ n'existe pas.

d) La suite de terme général $u_n = \sqrt{3n + 1} - \sqrt{2n + 1}$ converge vers 0.

Corrigés

4 Suites numériques

1

a.	b.	c.	d.
F	F	F	V

a) Si $u_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+3}$

les valeurs particulières $u_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n+3}$ convergent vers 1,

et les valeurs particulières $u_{2n+1} = -\dfrac{2n}{2n+4}$ convergent vers -1.

La suite (u_n) n'a donc pas de limite.

L'affirmation est fausse.

b) On peut encadrer :

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos n}{e^n + 1}\right| \leqslant \frac{1}{e^n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, la suite proposée converge vers 0 d'après le théorème d'encadrement.

L'affirmation est fausse.

c) On peut transformer l'écriture :

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}$$

La suite (u_n) converge donc vers $\dfrac{1}{2}$.

L'affirmation est fausse.

d) On a $u_n = \dfrac{1}{n+1} \times e^{-n^3+1}$.

Chaque terme du produit tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

L'affirmation est vraie.

2

a.	b.	c.	d.
V	V	F	F

a) La suite vérifie : $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Elle est donc majorée.

L'affirmation est vraie.

b) La suite étant croissante, on a : $u_1 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Elle est donc minorée.

L'affirmation est vraie.

c) Comme la suite est croissante et majorée, elle est convergente.
L'affirmation est fausse.

d) La suite est convergente vers l avec $l \leqslant 1$. Mais on ne peut rien dire de plus.
L'affirmation est fausse.

3

Réponse : C (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Mettez en facteur le terme dominant, aussi bien au numérateur qu'au dénominateur.

On a : $w_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \dfrac{5^n\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{5^n\left[1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]} = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

Comme $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

4

a.	b.	c.	d.
V	F	V	V

Les questions sont liées.

a) Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$.
Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) On calcule : $u_1 = 3 - \dfrac{4}{4+2} = \dfrac{7}{3} < u_0$. La suite ne peut donc pas être croissante.

En temps libre, vous pouvez démontrer, par récurrence, que, si la fonction f est croissante sur un intervalle où se trouvent toutes les valeurs u_n, alors la suite (u_n) est monotone.
Ici, la suite (u_n) est donc décroissante.

c) La propriété se démontre par récurrence. On a bien $u_0 \geqslant 2$.
Il reste à démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $u_k \geqslant 2$, alors $u_{k+1} \geqslant 2$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Vous pouvez raisonner par équivalences logiques successives :

$$3 - \frac{4}{u_k + 2} \geqslant 2 \iff \frac{4}{u_k + 2} \leqslant 1 \iff 4 \leqslant u_k + 2 \iff 2 \leqslant u_k.$$

Mais si vous remarquez que $f(2) = 2$, en sachant que la fonction f est croissante, vous avez :

$$u_k \geqslant 2 \implies f(u_k) \geqslant f(2) \quad \text{soit} \quad u_{k+1} \geqslant 2.$$

d) On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

En temps libre, notons l la limite de (u_n).
La suite (u_{n+1}) tend vers l ; la suite $f(u_n)$ tend vers $f(l)$. La limite vérifie donc :

$$l = f(l) = 3 - \frac{4}{l + 2} \iff l^2 - l - 2 = 0 = (l - 2)(l + 1).$$

Comme $l \geqslant 2$, on a donc $l = 2$.

5

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	F

La suite u est la même que celle de l'exercice précédent du même concours.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 2} = \frac{4 - \dfrac{4}{u_n + 2}}{1 - \dfrac{4}{u_n + 2}} = \frac{4u_n + 4}{u_n - 2} = 4\,\frac{u_n + 1}{u_n - 2} = 4\,v_n.$$

La suite v est donc géométrique, de raison 4, et de premier terme $v_0 = \dfrac{5}{2}$.

On peut donc écrire $v_n = \dfrac{5}{2} \times 4^n$, ce qui servira par la suite.

b) Si la raison d'une suite géométrique est différente de 1, une somme de termes de cette suite a pour valeur :

$$\text{premier terme} \times \frac{\text{raison}^{\text{nb de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}.$$

Dans la proposition de l'énoncé, le piège est le nombre de termes qui est égal à 11 et non à 10.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} \iff u_n\, v_n - 2\, v_n = u_n + 1 \iff u_n\,(v_n - 1) = 2\, v_n + 1.$$

La valeur de v_n n'est jamais égale à 1 (car on aurait alors $1 = -2$). On a donc :

$$u_n = \frac{2\, v_n + 1}{v_n - 1}\,.$$

d) Dans l'exercice précédent, la convergence de u vers 2 a déjà été expliquée. Mais cet exercice permet une autre façon de répondre.

D'après **a)** on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Comme $u_n = \dfrac{2\, v_n + 1}{v_n - 1} = \dfrac{2 + \dfrac{1}{v_n}}{1 - \dfrac{1}{v_n}}$ la suite u converge vers 2.

6

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	V

a) On a : $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\big(\ln x\big)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\,.$

b) Soit n un entier naturel quelconque. Pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$, on a :

$$x^n \leqslant x^{n+1} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{x^n} \geqslant \frac{1}{x^{n+1}} \quad \text{puis} \quad \frac{\ln x}{x^n} \geqslant \frac{\ln x}{x^{n+1}} \quad \text{et enfin} \quad I_n \geqslant I_{n+1}.$$

La suite (I_n) est donc décroissante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \geqslant 0$ car on intègre une fonction positive avec des bornes dans le bon ordre ($1 \leqslant \mathrm{e}$).

> Pour majorer I_n, majorez la fonction à intégrer avec l'idée d'obtenir une fonction plus simple et qui comporte encore n puisque n est présent dans le majorant proposé.

Pour $x \in [1, \mathrm{e}]$, on a $\ln x \leqslant \ln \mathrm{e}$ soit $\dfrac{\ln x}{x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^n}$ ce qui donne comme majorant de I_n :

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^{-n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{1-n}\left[\mathrm{e}^{-n+1} - 1\right] = \frac{1}{n-1}\left[1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}\right].$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d)

Pour qu'une intégration par parties simplifie le calcul, il faut dériver le logarithme.

Posons :

$$u(x) = \ln x \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad ; \quad v(x) = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

On a donc :

$$I_n = \left[\frac{x^{-n+1}\ln x}{1-n}\right]_1^{\mathrm{e}} + \frac{1}{n-1}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{\mathrm{e}^{-n+1}}{1-n} + \frac{1}{n-1}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-n+1}}{1-n} + \frac{1}{n-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-n+1}}{1-n} - \frac{1}{-n+1}\right]$$

donc :

$$(n-1)^2 I_n = 1 - n\,\mathrm{e}^{-n+1}$$

ce qui est bien l'égalité annoncée.

7

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	V	V	V

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{-u_n + v_n}{5} = \frac{1}{5}\,w_n.$$

La suite w est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Comme $w_0 = v_0 - u_0 = 5$, on a : $w_n = 5\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$, c'est-à-dire $u_n < v_n$ ce qui va servir.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(v_n - u_n) = \frac{2}{5}\,w_n > 0.$$

La suite u est donc croissante.

De la même manière, $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{5}\,w_n < 0$ montre que la suite v est décroissante.

c) On a alors les inégalités :

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_n < v_n < \cdots < v_1 < v_0$$

La suite u est croissante et majorée par $v_0 = 5$, donc convergente.
La suite v est décroissante et minorée par $u_0 = 0$, donc convergente.
Rajoutons que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ montre que les deux limites sont égales.
Les deux suites u et v sont adjacentes.

d) L'affirmation de l'énoncé est toujours vraie dans le cas de suites adjacentes.
Pour faire du zèle, on peut le retrouver :
$u_n \leqslant u_{n+1}$ vient de u croissante ;
$u_{n+1} \leqslant v_n$ vient de $v_n - u_{n+1} = \dfrac{3}{5} w_n > 0$.

8

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	V	V	V

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{-2}{x-3}$.
La fonction f est définie pour $x \neq 3$ et elle est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;3[$ et $]3;+\infty[$.
D'autre part, on a $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$.
On va donc retenir que f est croissante sur $[1;2]$ et que ses valeurs décrivent alors l'intervalle $[1;2]$.

a) Comme $u_0 \in]1;2[$, l'étude précédente montre que toutes les valeurs u_n vont rester dans l'intervalle $]1;2[$.

b) Comme la fonction f est croissante sur un intervalle qui contient toutes les valeurs u_n, on montre par récurrence que u est monotone.
Comme $u_1 = \dfrac{4}{3} < u_0$, la suite est décroissante.
Elle est minorée par 1, donc convergente.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{-2}{u_n-3}-2}{\dfrac{-2}{u_n-3}-1} = \frac{-2u_n+4}{-u_n+1} = 2v_n \qquad \textit{et} \quad v_0 = -1.$$

La suite v est donc géométrique, de raison 2, et de premier terme $v_0 = -1$.
On a donc : $v_n = -2^n$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d) De l'égalité $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ on déduit :

$v_n u_n - v_n = u_n - 2 \iff u_n (v_n - 1) = v_n - 2 \iff u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$ (car $v_n \neq 1$).

En reportant la valeur déjà obtenue pour v_n :

$$u_n = \frac{-2^n - 2}{-2^n - 1} = \frac{1 + 2^n + 1}{1 + 2^n} = 1 + \frac{1}{1 + 2^n} \cdot$$

9

a.	b.	c.	d.
F	F	F	V

a) La suite v est croissante et majorée par π. Sa limite l vérifie $l \leqslant \pi$. Mais on ne la connaît pas.
L'affirmation est donc fausse.

b) Sur l'intervalle $[0; \pi]$, la fonction cosinus est décroissante. La suite v étant croissante, la suite c est décroissante.
L'affirmation est donc fausse.

c) La fonction sinus est périodique. Mais on ne sait rien sur la périodicité de la suite v. On ne peut rien dire sur la suite s.
L'affirmation est donc fausse.

d)

> Cette question est très difficile. N'y passez pas trop de temps un jour de concours.

• Supposons que la suite v converge vers $\dfrac{\pi}{4} \cdot$ Comme c'est une suite croissante, les valeurs v_n sont toutes dans l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Sur cet intervalle, la fonction sinus est croissante. La suite s est donc croissante. Et on sait déjà que la suite c est décroissante.
Pour $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a : $\sin x \leqslant \cos x$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $s_n \leqslant c_n$.

Enfin, la suite s, croissante et majorée, converge vers $\sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

De même, la suite c converge vers $\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot$
Les deux suites c et s sont donc adjacentes.

• Réciproquement, supposons que c et s soient adjacentes. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin v_n \leqslant \cos v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left[\cos v_n - \sin v_n\right] = 0.$$

Comme $\cos v_n - \sin v_n = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + v_n\right)$, on en déduit que v converge vers $\frac{\pi}{4}$.

10

a.	b.	c.	d.
V	V	V	V

a) La propriété peut se démontrer par récurrence.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et $\frac{1}{0!} = 1$.

Supposons que $u_k = \frac{k}{(k-1)!}$ et montrons que l'égalité est encore vraie por $k+1$.

$u_{k+1} = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) u_k = \frac{k+1}{k^2}\,\frac{k}{(k-1)!} = \frac{k+1}{k!}$.

La propriété est donc démontrée.

b) La suite u est à valeurs strictement positives. On peut considérer le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1.$$

La suite u est donc décroissante. L'affirmation est vraie.

c) La propriété peut se démontrer par récurrence.

Elle est vraie pour $n = 2$ car $u_2 = 2$.

Supposons qu'elle soit vraie pour k et montrons qu'elle est encore vraie pour $k+1$.

Comme on passe de u_k à u_{k+1} en multipliant par $\frac{k+1}{k^2}$ il suffit de vérifier que ce coefficient est $\leqslant \frac{3}{4}$. On a :

$$\frac{k+1}{k^2} \leqslant \frac{3}{4} \iff 4k+4 \leqslant 3k^2 \iff 3k^2 - 4k - 4 \geqslant 0 \iff k \geqslant 2$$

car le trinôme $3x^2 - 4x - 4$ a pour racines $-\frac{2}{3}$ et 2, et il est positif à l'extérieur des racines.

La propriété est donc démontrée. L'affirmation de l'énoncé est vraie.

d) L'encadrement de la question précédente entraîne que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

11

a.	b.	c.	d.	e.
F	V	V	V	F

Le terme général de la suite arithmétique s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = u_1 + (n-1)r = 5n - 33.$$

a) Avec $n = 6$, on obtient : $u_6 = -3$.

La question vérifie que vous avez bien remarqué qu'on partait de u_1 et non de u_0.

b) La condition s'écrit :

$$u_m > m \iff 5m - 33 > m \iff 4m > 33.$$

Elle est vraie à partir de $m = 9$.

c) On a : $u_n\, u_{n+1} = (5n - 33)(5n - 28)$.

Si x est réel, avec le signe d'un trinôme on a :

$$(5x - 33)(5x - 28) < 0 \iff 5{,}6 < x < 6{,}6.$$

Un nombre entier, et un seul, vérifie cette condition : $n = 6$.

d) La condition s'écrit :

$$5p - 33 = 2\,007 \iff p = 408.$$

e) La condition s'écrit :

$$-28 + 5k - 33 = 2\,007 \iff 5k = 2\,068.$$

Comme 2 068 n'est pas divisible par 5, il n'existe pas d'entier k qui convienne.

12

a.	b.	c.	d.	e.
V	V	F	F	F

La suite (u_n) est une suite récurrente définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + 3).$$

Toutes les valeurs u_n sont positives et, sur $[0; +\infty[$, la fonction f est croissante car $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, x \geqslant 0$.

a) La fonction f étant croissante, la suite (u_n) est monotone. Comparons les deux premiers termes :

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 > u_0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b) Si la suite (u_n) converge vers l, alors $f(l) = l$. Cherchons s'il existe x tel que $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff x^2 + 3 = 2\sqrt{3}\,x \iff x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$$
$$\iff \left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 0 \iff x = \sqrt{3}.$$

En s'inspirant de ce résultat, montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < \sqrt{3}.$$

On a bien $u_0 < \sqrt{3}$.
Si l'on suppose $u_k < \sqrt{3}$, comme f est strictement croissante, on en déduit $f(u_k) < f(\sqrt{3})$, soit $u_{k+1} < \sqrt{3}$.
La propriété est donc démontrée et la suite est majorée.

c) La suite (u_n), croissante et majorée, converge.
Et sa limite l vérifie $f(l) = l$, c'est-à-dire $l = \sqrt{3}$.

d) On a toujours $u_p < \sqrt{3}$. L'affirmation est donc fausse.

e) S'il existait k tel que $\sqrt{k} \leqslant u_k$, on aurait alors $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{3}$, soit $k \leqslant 3$.
Mais pour les premières valeurs de k :

$$u_0 = 0 \ ; \ u_1 \approx 0{,}86 \ ; \ u_2 \approx 1{,}08 \ ; \ u_3 \approx 1{,}20$$

ne conviennent pas.
Il n'existe donc pas d'entier k tel que $\sqrt{k} \leqslant u_k$.

13 Partie A

1. On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a : $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 3}{2x^2}$

d'où l'on déduit le tableau des variations de f :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La fonction f admet donc un minimum pour $x = \sqrt{3}$, dont la valeur est :

$$m = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

3. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2x}\right) = 0.$
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc, au voisinage de $+\infty$, une asymptote $\triangle$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

4. Comme $f(x) - x = \dfrac{3 - x^2}{2x^2}$
le signe de cette différence est positif si $x \in [0; \sqrt{3}]$,
négatif si $x \in [\sqrt{3}; +\infty]$.

5.

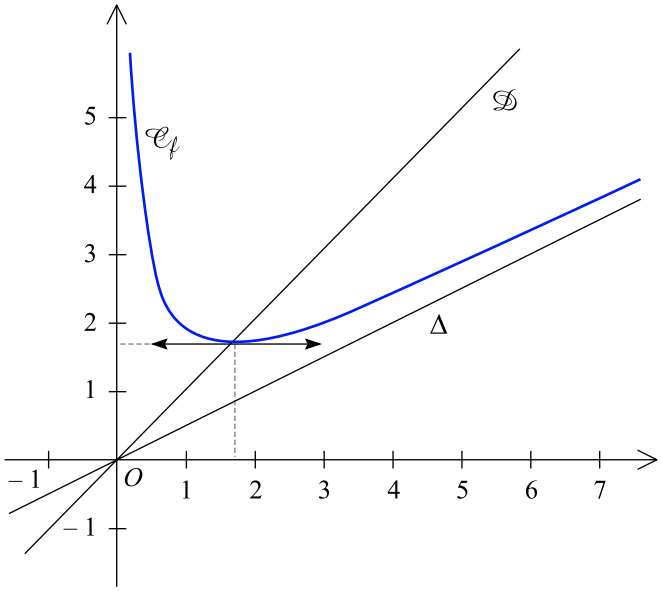

Figure 4.1

Partie B

La suite (u_n) étant définie par récurrence, il serait normal de penser à utiliser un raisonnement par récurence.

1. On a $u_0 = 3 > \sqrt{3}$.
Pour $n \geqslant 1$ on a $u_n = f(u_{n-1})$ et la fonction admet $\sqrt{3}$ comme valeur minimum.
On a donc $u_n \geqslant \sqrt{3}$ pour tout n.

En l'absence de la partie **A**, la démonstration se fait par récurrence.

- On a : $u_0 = 3 > \sqrt{3}$.
- Si l'on suppose $u_{k-1} \geqslant \sqrt{3}$, comme la fonction f est croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$, on en déduit : $f(u_{k-1}) \geqslant f(\sqrt{3})$ c'est-à-dire $u_k \geqslant \sqrt{3}$.

2. Toutes les valeurs u_n appartiennent à $[\sqrt{3}; +\infty[$ et sur cet intervalle, la fonction f est croissante.

On sait qu'alors la suite (u_n) est monotone. Comme $u_1 = 2 < u_0$, elle est décroissante.

Cette propriété peut se redémontrer par récurrence :

- On a : $u_0 = 3 > u_1$.
- Si l'on suppose $u_{k-1} \geqslant u_k$, comme la fonction f est croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$, on en déduit : $f(u_{k-1}) \geqslant f(u_k)$ c'est-à-dire $u_k \geqslant u_{k+1}$.

Dans ce problème vous pouvez aussi utiliser la question **A.4.a)** sur le signe de $f(x) - x$.

3. a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.

Elle converge donc vers une limite $l \geqslant \sqrt{3}$.

b) La limite l vérifie l'égalité $l = f(l)$ avec $l \geqslant \sqrt{3}$.

D'après la partie **A**, le seul réel qui correspond à cette condition est $l = \sqrt{3}$.

14

1. On a $u_1 = \dfrac{3}{2} > 0$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons que, pour un entier $k \geqslant 1$, on ait $u_k > 0$. Alors $u_{k+1} = u_k \left(1 + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right) > 0$.

La propriété est vraie pour $k + 1$. On a donc démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n > 0.$$

2. Pour $n = 1$, on a $\ln u_1 = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$; la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons que la propriété soit vraie pour k et montrons qu'elle est vraie pour $k + 1$.

$$\begin{aligned}\ln(u_{k+1}) &= \ln(u_k) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3. a) S_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$. On a :

$$S_n = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

T_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$. On a :

$$T_n = \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

b) Comme $|\frac{1}{2}| < 1$ et $|\frac{1}{4}| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$.

4. Appliquons l'encadrement supposé (que vous pourriez démontrer avec deux études de variations de fonctions) avec $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2^2}, \cdots, x = \frac{1}{2^n}$. On a :

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) & \leqslant & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) & \leqslant & \frac{1}{2^2} \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n} & \leqslant & \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) & \leqslant & \frac{1}{2^n}
\end{array}$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

5. a) Les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1+\frac{1}{2^{n+1}} > 1 \implies u_{n+1} > u_n.$$

La suite est donc strictement croissante.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[S_n - \frac{1}{2}T_n\right] = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, on déduit de la question **4** que, si la suite (u_n) converge vers l, alors $\frac{5}{6} \leqslant \ln l \leqslant 1$.

En temps libre, remarquez que (S_n) est croissante car $S_{n+1} - S_n > 0$ et converge vers 1.
Elle est donc majorée par 1, ce qui entraîne $\ln u_n \leqslant 1$, soit $u_n \leqslant \mathrm{e}$.
La suite (u_n) croissante et majorée est donc bien convergente.

15 Réponse : D (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5}\,\frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5}\,v_n.$$

La suite (v_n) est donc bien géométrique et sa raison est $\dfrac{1}{5}$.

16

a.	b.	c.	d.
F	F	F	F

a) En mettant en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur, on a :

$$u_n = \frac{n\sqrt{n}}{n^2}\,\frac{2 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{n^2}}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
L'affirmation est fausse.

b) Lorsque n tend vers l'infini, alors $\pi + \dfrac{\pi}{n}$ tend vers π.
La suite (u_n) converge donc vers $\sin \pi = 0$.
L'affirmation est fausse.

c) Avec $u_n = \dfrac{\cos n}{\mathrm{e}^{3n} + n^2}$ on a : $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure que (u_n) est convergente et a pour limite 0.
L'affirmation est fausse.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

D'une façon générale, quand $u_n = v_n\, w_n$, si (v_n) est bornée et si (w_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

d) On peut transformer l'écriture :

$$u_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1} = \frac{n}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{2n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{n}} + \sqrt{2+\frac{1}{n}}}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{n}} + \sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
L'affirmation est fausse.

Fonctions usuelles

5

Thèmes du chapitre

Fonctions circulaires.
Logarithmes, exponentielles, puissances.
Équations différentielles.

Des savoir-faire à maîtriser

- Des limites à connaître :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$$

et les croissances comparées (où $n>0$) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln x=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x x^n=0$$

- Des propriétés algébriques à connaître :

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b \quad ; \quad \ln(a^r)=r\ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$
$$\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b \quad ; \quad \mathrm{e}^{ra}=(\mathrm{e}^a)^r \quad ; \quad \mathrm{e}^{-a}=\frac{1}{\mathrm{e}^a} \quad ; \quad \mathrm{e}^{a-b}=\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$$

- Si $k\in\mathbb{Z}$, on a : $\sin(k\pi)=0$ et $\cos(k\pi)=(-1)^k$.

Des réflexes à avoir

- Pour résoudre des équations, ou des inéquations, trigonométriques du genre $\sin x=a$, visualisez le problème à l'aide du cercle trigonométrique (dans votre tête ou sur papier).

- vérifier qu'une fonction donnée f est solution d'une équation différentielle, calculez $f'(x)$ et reportez $f(x)$ et $f'(x)$ pour observer que l'égalité est toujours vraie.

- La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre dépend d'une constante C. La valeur de C est souvent précisée par la donnée d'une condition initiale.

1 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\cos x . \sin x|$.

a) La fonction f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

b) $f(x) \leqslant \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

d) $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \left(\mathrm{e}^x\right)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.

d) Pour tout $x > 0$ $\quad \mathrm{e}^{x \ln x} = x^x$.

e) Pour tout $x > 0$ $\quad \mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{-x} < 0$.

3 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ la courbe représentant la fonction exponentielle et (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a(x + 1 - a)$ et Γ sa courbe représentative dans le même repère.

a) Une équation de (T) est : $y = \mathrm{e}^a(x + 1 - a)$.

b) La dérivée f' de f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\mathcal{C}$ est au-dessous de (T) avant le point $A\left(a; \mathrm{e}^a\right)$ et au-dessus de (T) après A.

d) À tout réel x_0 on associe les points M_0 de $\mathcal{C}$ et N_0 de Γ d'abscisse commune x_0. x_0 étant fixé, il existe une valeur de a telle que $\mathcal{C}$ et Γ possèdent des tangentes parallèles respectivement en M_0 et N_0.

4 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Dans le repère orthonormal ci-dessous sont représentées les courbes des fonctions logarithme népérien, exponentielle et identité $(x \mapsto x)$.

a et b sont deux réels strictement positifs et A et B sont deux points de $\mathcal{C}_1$ d'abscisses respectives a et b.

On appelle I le milieu de $[AB]$. On notera ceci :

- $J \in \Delta$, $K \in \mathcal{C}_2$, $C \in \triangle$.
- Les droites (IJ) et (KC) sont parallèles à l'axe des abscisses.
- La droite (JK) est parallèle à l'axe des ordonnées.

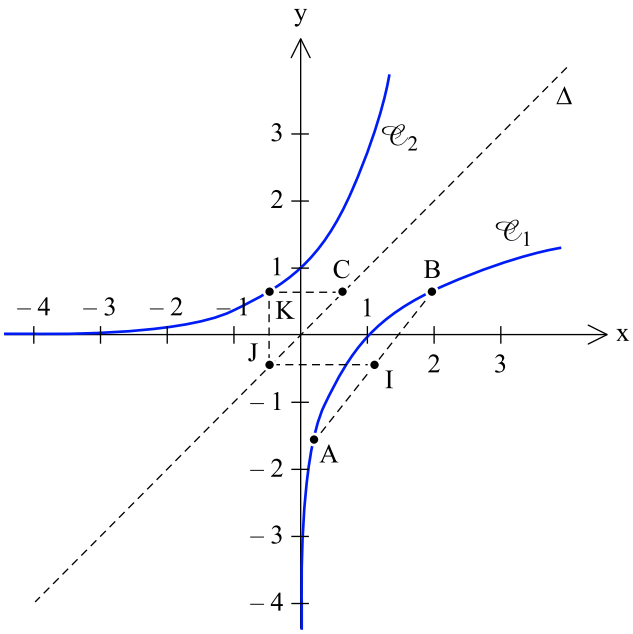

Figure 5.1

a) Le point I a les coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2}; \ln\left(\sqrt{ab}\right)\right)$.

b) L'abscisse de C est : $e^{\sqrt{ab}}$.

c) La tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est parallèle à la droite Δ si et seulement si $a+b=2$.

d) Le symétrique de A par rapport à Δ a pour coordonnées $(\ln a; a)$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

5 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$. On appelle D l'ensemble de définition de f.

a) f est dérivable sur $D = [0; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) Quel que soit $x \in D$, $f(x) \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

d) L'équation $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ admet une unique solution sur D.

6 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

a) La solution de l'équation différentielle $2y' + y = 0$ qui prend la valeur 5 en 1 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}}$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(4 - x) \leqslant 1$ est $[4 - \mathrm{e}; +\infty[$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentant la fonction ln dans un repère orthonormal du plan d'origine O.

Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a, B le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses et C le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en A avec l'axe des abscisses.

C est le milieu de $[OB]$ si et seulement si $a = \sqrt{\mathrm{e}}$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$, et trois points A, B et C deux à deux distincts et non alignés.

Soit G le barycentre de $\{(A, \mathrm{e}^a); (B, \mathrm{e}^{-a})); (C; 2)\}$.

Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ le point G a les coordonnées (x, y) telles que :

$$x = \frac{1}{(\mathrm{e}^a + 1)^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2\mathrm{e}^a}{(\mathrm{e}^a + 1)^2}.$$

7 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x \ln(1 + x) - 2 \ln x}{x^2} = 1.$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = 0.$

c) L'inéquation $\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^x + 2 \leqslant 0$ n'a pas de solution réelle.

d) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x^2)$ possède le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Figure 5.2

8 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$.

Soit f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-3x}$.

a) On a $f'(0) = 4$.

b) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1$.

c) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{3x}$.

d) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3f(x) - \mathrm{e}^{3x} - 2}{9}$.

9 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2}\mathrm{e}^{-n\pi}(\mathrm{e}^{-\pi} + 1)$.

c) f est l'unique solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

d) Si g est une solution de (E), la courbe représentant g possède une tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est donnée par :

$$y = (1 - 2x)\,g(0).$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{3x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = -\lambda^2 \mathrm{e}^{x} + 2\lambda \mathrm{e}^{2x}.$$

On appelle respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ leurs représentations graphiques dans un repère du plan.

a) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent au point $A(\ln \lambda ; 3\lambda)$.

b) Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{C}_1$ est « au-dessus » de $\mathcal{C}_2$.

c) Il existe un point B en lequel $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ possèdent la même tangente.

d) Lorsque λ est supérieur à 1, l'aire de la portion du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et limitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln \lambda$ est, en unités d'aire, $\dfrac{(\lambda - 1)^3}{3}$.

11 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Donner l'ensemble $\mathcal{S}$ des réels appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ vérifiant l'équation :

$$\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0.$$

A : $\mathcal{S} = \left\{0 ; \pi ; \dfrac{4\pi}{3} ; -\dfrac{\pi}{3}\right\}$; **B** : $\mathcal{S} = \left\{0 ; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

C : $\mathcal{S} = \left\{0 ; \pi ; \dfrac{4\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$; **D** : $\mathcal{S} = \left\{0 ; \pi ; \dfrac{7\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

E : $\mathcal{S} = \left\{0 ; \pi ; -\dfrac{\pi}{3} ; -\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

12 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Donner la solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cos x$$

vérifiant la condition $y(0) = 1$.

A : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos x$; **B** : $f(x) = \ln\left(1 + \cos x\, \mathrm{e}^{-2x}\right)$

C : $f(x) = (1 + \sin x)\,\mathrm{e}^{-2x}$; **D** : $f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\sin x$

E : $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x})\cos x$

13 GEIPI 2007

On se propose de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \qquad f'(x) - 3f(x) = \frac{3}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}$$

et qui vérifient : $f(0) = 0$.

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E). On désigne par f' sa dérivée.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{-3x}\, f(x).$$

On désigne par h' la dérivée de h.

1. a) Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$, pour tout réel x.

b) Expliquer pourquoi la dérivée h' de h vérifie, pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{3\,\mathrm{e}^{-3x}}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}\cdot$$

2. Déterminer alors toutes les fonctions h possibles. On justifiera la réponse.

3. En déduire toutes les fonctions f solutions de (E).

4. Déterminer la fonction f_0, solution de (E), qui vérifie $f_0(0) = 0$.

14 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

On considère l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$(E) : \quad \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Une des cinq affirmations suivantes est exacte. Laquelle ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

A : (E) admet pour solution : $y : \quad x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{-x} + 1$.

B : (E) admet pour solution : $y : \quad x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + \dfrac{1}{2}$ où C est un réel quelconque.

C : (E) admet pour solution : $y : \quad x \mapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x} + 3$ où C est un réel quelconque.

D : (E) admet pour unique solution : $y : \quad x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + 2$.

E : (E) admet pour unique solution : $y : \quad x \mapsto -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + 4$.

15 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

Dire quel est l'ensemble $\mathcal{J}$ des solutions réelles de l'inéquation suivante :

$$2\ln(2-x) - \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) \leqslant 3\ln 2$$

A : $\mathcal{J} = [0;2[$; **B** : $\mathcal{J} =]-\dfrac{1}{2};2[$; **C** : $\mathcal{J} = [0;12]$

D : $\mathcal{J} =]-\dfrac{1}{2};0] \cup]2;12]$; **E** : $\mathcal{S} =]-\dfrac{1}{2};0]$

1

a.	b.	c.	d.
V	V	F	V

a) On peut écrire $f(x) = \left|\frac{1}{2}\sin(2x)\right|$, d'où pour tout réel x :

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\sin(2x+\pi)\right| = \left|-\frac{1}{2}\sin(2x)\right| = \left|\frac{1}{2}\sin(2x)\right| = f(x).$$

L'affirmation est vraie.

b) De l'écriture précédente, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x)| = \left|\frac{1}{2}\sin(2x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$

L'affirmation est vraie.

c) Sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, puis :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot$$

L'affirmation est fausse.

d) On peut calculer par intervalles choisis pour enlever la valeur absolue.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

L'affirmation est vraie.

De façon générale (mais hors programme de Terminale), si f est périodique, de période T, l'intégrale sur un intervalle de longueur égale à la période $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de a. On a donc ici :

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

2

a.	b.	c.	d.	e.
F	V	V	V	F

Le but de cet exercice est de vérifier vos connaissances sur les propriétés algébriques élémentaires de la fonction exponentielle. Ne cherchez donc pas la complication.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^2$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2 \geqslant 0$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(\mathrm{e}^x\right)^2 = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$.

d) Pour tout $x > 0$: $\mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^{\ln(x^x)} = x^x$.

e) Pour tout $x > 0$: $\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{-x} = \left(\mathrm{e}^1 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e} - 1 \approx 1{,}7$, l'affirmation est fausse.

3

a.	b.	c.	d.
V	V	V	F

Attention à bien lire : la courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction exponentielle et non la fonction f introduite dans l'énoncé. Et les questions sont à examiner dans l'ordre.

a) La tangente à $\mathcal{C}$ au point $A\left(a; \mathrm{e}^a\right)$ a pour équation :

$$y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a\,(x - a) \quad \text{soit} \quad y = \mathrm{e}^a\,(x + 1 - a).$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ autant de fois qu'on veut. On a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a \quad ; \quad f''(x) = \mathrm{e}^x.$$

Comme f'' est positive, la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f représente la différence entre l'ordonnée du point d'abscisse x sur la courbe $\mathcal{C}$ et l'ordonnée du point de même abscisse sur la tangente (T).
La fonction f' et croissante et $f'(a) = 0$. Elle est donc négative pour $x < a$ et positive pour $x > a$.

La fonction f est donc décroissante pour $x < a$, et, comme $f(a) = 0$, elle est négative.
La fonction f est donc croissante pour $x > a$, et, comme $f(a) = 0$, elle est positive.

d) La propriété de l'énoncé (tangentes parallèles) signifie que les coefficients directeurs des tangentes sont égaux, soit :

$$f'(x_0) = \mathrm{e}^{x_0} \iff \mathrm{e}^{x_0} - \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{x_0} \iff \mathrm{e}^{a} = 0,$$

ce qui impossible.

4

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	V

a) Les points A et B ont pour coordonnées : $A(a; \ln a)$ et $B(b; \ln b)$.
Le milieu de I de $[AB]$ a donc pour cordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{\ln a + \ln b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \ln\left(\sqrt{ab}\right)\right).$$

b)

Cherchez les coordonnées des points dans l'ordre de la construction.

On a : $J(y_I, y_I)$, $K(y_I, \mathrm{e}^{y_I})$, $C(\mathrm{e}^{y_I}, \mathrm{e}^{y_I})$.
Comme $\mathrm{e}^{y_I} = \exp\left[\ln(\sqrt{ab})\right] = \sqrt{ab}$, le point C a pour coordonnées $\left(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\right)$.

c) En un point d'abscisse x_0, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $y = \ln x$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{x_0}$.
Pour $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ le coefficient directeur $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{2}{a+b}$ est le même que celui de $\triangle$ si, et seulement si, $\dfrac{2}{a+b} = 1$, soit $a + b = 2$.

d) La symétrie par rapport à $\triangle$ a pour fonctionnement sur les coordonnées :

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

Le point $A(a, \ln a)$ a donc pour image $(\ln a, a)$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

5

a.	b.	c.	d.
F	F	V	F

L'ensemble de définition D de la fonction f est l'ensemble des x tels que $e^x - 1 \geqslant 0$, soit $D = [0, +\infty[$.

a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Mais elle ne peut pas être dérivable en 0. Elle pourrait seulement être dérivable à droite.

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, le terme dominant dans $e^x - 1$ est e^x. Mettons-le en facteur :

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{e^x}\sqrt{1 - e^{-x}} = e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{1 - e^{-x}}.$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - e^{-x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c)

Si vous n'avez pas de meilleure idée, vous pouvez dresser le tableau de variation de f.

Mais on observe directement que $f(x) \geqslant 0$, et l'autre inégalité peut se transformer avec des équivalences logiques successives :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff e^{-x}\sqrt{e^x - 1} \leqslant \frac{1}{2} \iff e^{-2x}\left(e^x - 1\right) \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\iff 4(e^x - 1) \leqslant e^{2x} \iff e^{2x} - 4e^x + 4 \geqslant 0$$

$$\iff \left(e^x - 1\right)^2 \geqslant 0.$$

Comme la dernière inégalité est vraie, toutes les autres inégalités de la chaîne sont vraies.

d) Comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$, d'après la question précédente l'équation $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ne peut pas avoir de solution.

6

a.	b.	c.	d.
V	F	V	V

Corrigés

Les questions sont indépendantes.

a) Il suffit de vérifier que la fonction proposée convient.
Si $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}} = 5\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ alors $f'(x) = -\dfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = -\dfrac{1}{2}f(x)$, soit :

$$2f'(x) + f(x) = 0.$$

D'autre part : $f(1) = 5\,\mathrm{e}^{0} = 5$.

Vous pouvez aussi écrire la solution générale de l'équation différentielle, qui est de la forme $K\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, puis calculer K avec la condition $f(1) = 5$.

b) Pour que l'inéquation ait un sens, il faut $4 - x > 0$, soit $x < 4$. Comme tous les réels de l'ensemble de l'énoncé ne vérifient pas cette condition, la proposition est fausse.

En temps libre, vous pouvez résoudre l'inéquation :

$$\ln(4-x) \leqslant \ln \mathrm{e} \iff 4 - x \leqslant \mathrm{e} \iff 4 - \mathrm{e} \leqslant x.$$

Avec la condition d'existence, l'ensemble des solutions est donc : $[4 - \mathrm{e}, 4[$.

c) On a : $A(a, \ln a)$ et $B(a, 0)$. La tangente à $\mathcal{C}$ en A a pour équation :

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \quad \text{soit} \quad y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a.$$

Son intersection avec l'axe des abscisses est donc : $C\Big(a\,(1 - \ln a), 0\Big)$.

Le point C est le milieu de $[OB]$ si, et seulement si :

$$a\,(1 - \ln a) = \frac{a}{2} \iff \ln a = \frac{1}{2} \implies a = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

d) Le barycentre G existe puisque la somme des coefficients n'est pas nulle. On a donc pour tout point M :

$$\mathrm{e}^{a}\,\overrightarrow{MA} + \mathrm{e}^{-a}\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} = \left(\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a} + 2\right)\overrightarrow{MG}.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En choisissant $M = A$, on obtient :

$$\left(e^{a} + e^{-a} + 2\right)\overrightarrow{AG} = e^{-a}\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}.$$

Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, les coordonnées de G sont donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^{-a}}{e^{a} + e^{-a} + 2} = \dfrac{1}{e^{2a} + 1 + 2\,e^{a}} = \dfrac{1}{(e^{a}+1)^2} \\ y = \dfrac{2}{e^{a} + e^{-a} + 2} = \dfrac{2\,e^{a}}{(e^{a}+1)^2} \end{cases}$$

7

a.	b.	c.	d.
F	V	V	F

a) On peut écrire : $\dfrac{x\ln(1+x) - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} - \dfrac{2}{x}\,\dfrac{\ln x}{x}$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{2}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{x\ln(1+x) - 2\ln x}{x^2} = +\infty.$

b) Pour se ramener aux théorèmes du cours :

$$\frac{\ln x}{e^{x}} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^{x}}\,.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$, on a bien :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{x}} = 0.$$

c) Posons $X = e^{x}$. Comme $X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2)$, on a :

$$X^2 + 3X + 2 \leqslant 0 \iff -2 \leqslant X \leqslant -1.$$

Mais on a toujours $e^{x} > 0$. L'inéquation proposée n'a donc pas de solution réelle.

d) La fonction f est dérivable. mais le signe de

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[-\ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2}\right]$$

n'est pas spontané !

Vous pouvez remarquer que l'on a bien :

$$f'(x) < 0 \text{ pour } x < 0 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ ; \ f(0) = 0.$$

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ suffit pour conclure que le tableau de variation est faux.

8

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	V	F	V

a) La fonction f vérifie l'équation différentielle (E). En remplaçant x par 0, on a :

$$f'(0) - 3f(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Comme $f(0) = 1$, on a donc : $f'(0) = 4$.

b) Pour tout réel x :

$$g'(x) = f'(x)\,\mathrm{e}^{-3x} - 3f(x)\,\mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x}\left[f'(x) - 3f(x)\right] = \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{e}^{3x} = 1.$$

c) La fonction définie par $h(x) = x\,\mathrm{e}^{3x}$ est telle que $h(0) = 0$. Ce n'est donc pas la fonction f.

En temps libre, vous pouvez observer que h vérifie bien l'équation différentielle (E). C'est la condition initiale qui ne convient pas.

d) La fonction f vérifie l'équation (E). On en déduit en intégrant :

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$f(x) - f(0) - 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{3x} - 1\right]$$

d'où :

$$3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$$

ce qui donne l'égalité de l'énoncé.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

9

a.	b.	c.	d.
V	V	F	V

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}(-\sin x - \cos x) = \mathrm{e}^{-x}\,\cos x.$$

b) Comme f est une primitive de f', on a :

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x &= f\big[(n+1)\pi\big] - f\big[n\pi\big] \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-n\pi}(-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\,\mathrm{e}^{-n\pi}\big[\mathrm{e}^{-\pi} + 1\big].\end{aligned}$$

c) La fonction f est bien solution de l'équation différentielle (E) puisque :

$$f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x - \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

Mais comme $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ l'affirmation est fausse, et cette observation vous aurait suffit un jour de concours.

d) Si g est solution de (E), alors g est dérivable. Au point d'abscisse 0, sa courbe représentative a une tangente d'équation :

$$y - g(0) = g'(0)\big[x - 0\big].$$

En remplaçant x par 0 dans (E), on obtient : $g'(0) + 2g(0) = 0$, puis en reportant dans l'équation de la tangente :

$$y = g(0) + x\big(-2g(0)\big) = (1 - 2x)g(0).$$

10

a.	b.	c.	d.
F	V	V	V

a) L'abscisse d'un point d'intersection éventuel entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ vérifie :

$$\mathrm{e}^{3x} = -\lambda^2\mathrm{e}^x + 2\lambda\,\mathrm{e}^{2x} \iff \mathrm{e}^{2x} - 2\lambda\,\mathrm{e}^x + \lambda^2 = 0 = \big(\mathrm{e}^x - \lambda\big)^2.$$

Il existe donc un point d'intersection dont l'abscisse vérifie $x = \ln\lambda$ et l'ordonnée $y = f_1(\ln\lambda) = \mathrm{e}^{3\ln\lambda} = \lambda^3$.

L'ordonnée proposée est donc fausse, et on souhaite contrôler la dernière étape du calcul, c'est-à-dire que vous ne confondez pas $3\ln\lambda$ et $\ln(3\lambda)$.

b) Quel que soit $\lambda \in]0;+\infty[$, on a pour tout x :

$$f_1(x) - f_2(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - \lambda\right)^2 \geqslant 0.$$

L'affirmation est donc vraie.

c) Pour que les deux courbes aient une tangente commune, il est d'abord nécessaire qu'il existe x tel que $f_1'(x) = f_2'(x)$ (mêmes coefficients directeurs). Comme :
$f_1'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}$ et $f_2'(x) = -\lambda^2\mathrm{e}^x + 4\lambda\,\mathrm{e}^{2x}$, on a :

$$f_1'(x) = f_2'(x) \iff 3\,\mathrm{e}^{2x} - 4\lambda\,\mathrm{e}^x + \lambda^2 = 0.$$

On obtient une équation du second degré par rapport à $X = \mathrm{e}^x$, dont le discriminant est $\triangle = 4\lambda^2$. Ses racines sont $X_1 = \lambda$ et $X_2 = \dfrac{1}{3}\lambda$.
Revenons en x :

$$X_1 = \lambda = \mathrm{e}^{x_1} \iff x_1 = \ln\lambda \quad ; \quad X_2 = \frac{1}{3}\lambda = \mathrm{e}^{x_2} \iff x_2 = \ln\left(\frac{\lambda}{3}\right)$$

Comme $f_1(x_1) = \lambda^3 = f_2(x_1)$, au point $\left(\ln\lambda, \lambda^3\right)$, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ possèdent la même tangente. L'affirmation est donc vraie.

En temps libre, vous pouvez calculer $f_1(x_2) = \dfrac{1}{27}\lambda^3$ et $f_2(x_2) = -\dfrac{1}{9}\lambda^3$.
Comme ces résultats sont différents, cela montre qu'il n'y a qu'une seul point qui convient.

d) L'aire décrite dans l'énoncé est égale à :

$$\int_0^{\ln\lambda}\left[f_1(x) - f_2(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\ln\lambda}\left[\mathrm{e}^{3x} + \lambda^2\mathrm{e}^x - 2\lambda\,\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x} + \lambda^2\mathrm{e}^x - \lambda\,\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln\lambda}$$
$$= \frac{1}{3}\lambda^3 - \lambda^3 + \lambda^3 - \frac{1}{3} + \lambda - \lambda^2 = \frac{1}{3}\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1\right) = \frac{1}{3}(\lambda - 1)^3.$$

11 **Réponse : C** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

L'équation est équivalente à :

$$\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, on obtient donc les solutions :

$$\{0; \pi; 2\pi\} \quad \text{et} \quad \{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}.$$

12 **Réponse : C** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Vous pouvez éliminer les réponses **B** et **D** qui ne vérifient pas la condition $f(0) = 1$.
On va essayer les autres.

La fonction de la réponse **A** donne :

$f(x) = e^{-2x} \cos x$; $f'(x) = e^{-2x}\big[-2\cos x + \sin x\big]$

$$f'(x) + 2f(x) = e^{-2x} \sin x.$$

Elle ne convient pas.

La fonction de la réponse **C** donne :

$f(x) = e^{-2x}\big[1 + \sin x\big]$; $f'(x) = e^{-2x}\big[-2 - 2\sin x + \cos x\big]$

$$f'(x) + 2f(x) = e^{-2x} \cos x.$$

Elle convient.

La fonction de la réponse **E** donne :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)\cos x \quad ; \quad f'(x) = \left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\cos x - \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)\sin x$$

$$f'(x) + 2f(x) = 2e^{2x}\cos x - \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)\sin x.$$

Elle ne convient pas.

13 **1. a)** Avec la dérivation d'un produit, on a :

$$h'(x) = -3\,e^{-3x} f(x) + e^{-3x} f'(x) = e^{-3x}\big(f'(x) - 3f(x)\big).$$

b) Comme f est solution de (E), on a $f'(x) - 3f(x) = \dfrac{3}{1 + e^{-3x}}$
d'où en reportant dans le résultat précédent :

$$h'(x) = \frac{3\,e^{-3x}}{1 + e^{-3x}}\cdot$$

2. Si l'on note $u(x) = 1 + e^{-3x}$, on vient d'obtenir $h'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
d'où par calcul de primitives :

$$h(x) = -\ln\left(1 + e^{-3x}\right) + C \quad \text{où } C \text{ est un réel quelconque.}$$

3. Connaissant $h(x)$, on en déduit :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x}h(x) = -\mathrm{e}^{3x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) + C\mathrm{e}^{3x}.$$

4. La condition initiale $f(0) = 0$ conduit à $C = \ln 2$ et donc à :

$$f_0(x) = -\mathrm{e}^{3x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) + \ln 2\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-3x}}\right)$$

14 **Réponse : D** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Ce problème avec valeur initiale a une solution unique : vous pouvez éliminer **B** et **C**.

La fonction de la proposition **E** vérifie $y(0) = 2$ et doit donc être éliminée.

La solution générale de $y' = ay + b$ étant :

$$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

il ne reste que **D**.

15 **Réponse : A** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Il faut d'abord que les expressions écrites aient un sens, ce qui nécessite :

$$2 - x > 0 \quad \text{et} \quad x + \frac{1}{2} > 0, \quad \text{soit :} \quad x \in \left]-\frac{1}{2}; 2\right[.$$

La réponse **C** est déjà éliminée.

L'inéquation s'écrit alors :

$$\ln\left(\frac{(2-x)^2}{x+\frac{1}{2}}\right) \leqslant \ln(2^3).$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, cette inéquation est équivalente à :

$$\frac{(2-x)^2}{x+\frac{1}{2}} \leqslant 2^3 \iff x^2 - 4x + 4 \leqslant 8x + 4 \iff x^2 - 12x \leqslant 0$$

$$\iff x \in [0; 12].$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $[0; 2[$. C'est la réponse **A**.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

6 Calcul intégral

Thèmes du chapitre

Intégrale et aire, relation de Chasles, comparaison de deux fonctions, inégalité de la moyenne. Calcul de primitives, intégration par parties.

Des savoir-faire à maîtriser

- Une intégrale est un nombre qui dépend de la fonction à intégrer, des bornes, mais pas du nom donné à la variable d'intégration.
- Si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors $F'(x) = f(x)$.
- Des primitives à connaître :

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\sin(\alpha x+\beta)$	$-\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)$	$u^n(x)\,u'(x)$ avec $n \neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}\,u^{n+1}(x)$
$\cos(\alpha x+\beta)$	$\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$\mathrm{e}^{\alpha x+\beta}$	$\dfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha x+\beta}$	$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$

Des réflexes à avoir

- Si $f \leqslant g$, on a bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, mais à condition que $a < b$.
- Cas classiques de l'utilisation de l'intégration par parties :

P étant un polynôme et $\alpha \neq 0$,

– pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\sin(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\cos(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t+\beta}\,\mathrm{d}t$, dérivez le polynôme ;

– pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\ln t\,\mathrm{d}t$, dérivez le logarithme.

1 ECE 2008

Vrai ou faux ?

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \Big[|x-1|+|2x-1|\Big]\,\mathrm{d}x = 7$; **b)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \ln 3$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+\pi)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{2}$; **d)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$

2 EPF 2008

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel non nul n,

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)\,\mathrm{d}x$.

1. a) Calculer I_0.

b) En effectuant une intégration par parties, calculer I_1.

2. Sans calculer l'intégrale I_n :

a) montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ;

b) pour tout entier naturel non nul n, comparer I_n à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n\,\mathrm{d}x$;

c) montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Une intégration par parties permet de trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

Quelle est cette relation ?

A : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \dfrac{n}{2} I_{n-1}$; **B** : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$

C : $I_n = 2\,\mathrm{e}^2 - 2n I_{n-1}$; **D** : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \dfrac{n-1}{2} I_{n-1}$

E : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

Une intégration par parties permet de calculer l'intégrale : $I = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x$.
Quelle est la valeur de I ?

A : $I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \dfrac{1}{4}$; **B** : $I = 0$; **C** : $I = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$

D : $I = -\dfrac{1}{4}$; **E** : $I = 1$

5 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x.$$

On note $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aires, de la partie de plan délimitée par $\mathcal{C}$, les axes du repère et la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$. Donner la valeur de $\mathcal{A}$.

A : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}$; **B** : $\mathcal{A} = 1 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}$; **C** : $\mathcal{A} = -1 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$

D : $\mathcal{A} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}$; **E** : $\mathcal{A} = 1 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$

6 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. On appelle D l'ensemble de définition de f et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) $D =]-\infty; -1[$;

b) f admet des primitives sur $]-\infty; -1[$; l'une d'elles est la fonction F définie sur $]-\infty; -1[$ par :

$$F(x) = (1 + x)\ln(1 + x) + (1 - x)\ln x.$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} xf(x) = 1$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \dfrac{2}{n(n+1)} + \ln(n + 1)$.

7 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit f une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$.
Soit F et G les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ respectivement par :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x)=x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On désigne par Γ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

a) $G(0)=G(1)$.

b) G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a $G'(x)=F(x)+xf(x)$.

c) On ne peut pas prévoir le sens de variation de G sur $[0;+\infty[$ avec les seules hypothèses de l'énoncé.

d) L'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x=0$, $x=2$, $y=0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2)+F(0)$.

8 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On donne les deux courbes $\mathcal{C}$ et Γ ci-dessous.

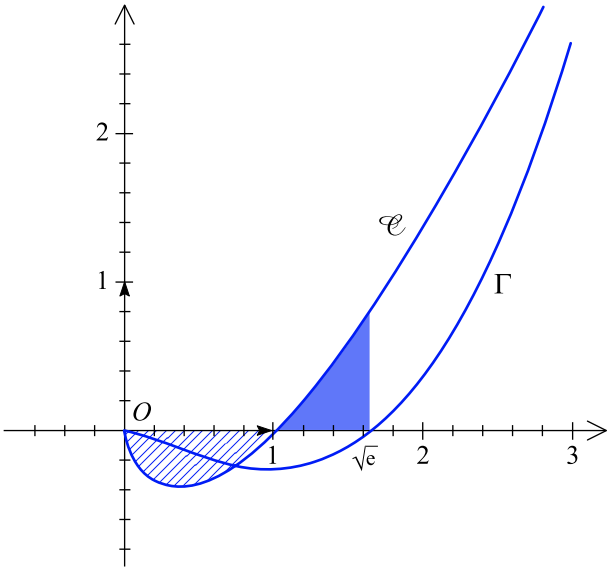

Figure 6.1

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

L'une de ces courbes représente une fonction f définie et continue sur $[0;+\infty[$; l'autre représente une primitive F de f sur $[0;+\infty[$.
On admettra que Γ possède l'axe des abscisses pour tangente en $O(0;0)$ et que $\mathcal{C}$ possède l'axe des ordonnées pour tangente en ce même point.

a) Γ est la courbe qui représente f.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) L'aire de la surface hachurée est la même que celle de la surface tramée.

d) F est deux fois dérivable en 0 et $F''(0) = 0$.

9 GEIPI-Polytech 2008

On considère deux fonctions f et g définies sur $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$ par :

$$f(x) = \cos x \quad ; \quad g(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}\cdot$$

Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé.

1. a) Pour tout x de $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$, $g(x) - f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$g(x) - f(x) = \frac{h(x)}{1-\sin x}\cdot$$

Donner une expression simplifiée de $h(x)$.

b) Déterminer l'ensemble S des solutions de l'équation $g(x) - f(x) = 0$ dans $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

c) Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection C et D des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
Préciser les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. a) Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.

b) Dresser le tableau des variations de f.

3. a) Déterminer $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g.

b) Dresser le tableau des variations de g.

4. a) Donner une équation des tangentes T_C et T_D à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points C et D.

b) Donner une équation des tangentes T'_C et T'_D à la courbe $\mathcal{C}_g$ aux points C et D.

5. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que les tangentes T_C, T_D et T'_C et T'_D.

6. a) On pose : $I = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1-\sin x} \, \mathrm{d}x$.

Déterminer les valeurs de I et de J. Justifier les calculs.

b) Sur la figure de la question **5**, colorier la partie de plan d'aire $I - J$ unités d'aires.

10 ECE 2008

Vrai ou faux ?

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x^2 - 2x - 3| \, \mathrm{d}x = \frac{20}{3}$; **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2+2x+1} \, \mathrm{d}x = 1$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$; **d)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e}\,(\mathrm{e}-1)$

11 ECE 2008

Vrai ou faux ?

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$; **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x+n\pi)\cos^2(x+n\pi) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$; **d)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\cos^2(2x) \, \mathrm{d}x = 0$

12 ECE 2008

Vrai ou faux ?

a) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)|x-1| \, \mathrm{d}x = 0$; **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = 2$; **d)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x = \ln 2$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

13 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) La fonction f est périodique de période π.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_0^{4\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

d) $\displaystyle\int_0^{4\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

14 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (3-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x.

Parmi cinq expressions, laquelle correspond à celle d'une primitive G de g.

A : $G(x) = (-3x + x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$; **B** : $G(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

C : $G(x) = (-5+2x)\,\mathrm{e}^{-x}$; **D** : $G(x) = (5-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$

E : $G(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$

1

a.	b.	c.	d.
V	F	F	V

a) La fonction à intégrer se simplifie suivant l'intervalle :

si $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ $\quad f(x) = -x + 1 - 2x + 1 = -3x + 2$;

si $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ $\quad f(x) = -x + 1 + 2x - 1 = x$;

si $x \in [1; 2]$ $\quad f(x) = x - 1 + 2x - 1 = 3x - 2$.

En utilisant la relation de Chasles, on a donc :

$$\int_{-1}^{2} \left[|x-1| + |2x-1|\right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-3x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (3x-2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{1}^{2}$$

$$= -\frac{3}{8} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + 6 - 4 - \frac{3}{2} + 2 = 7.$$

L'affirmation est exacte.

b) Sur l'intervalle [1; 2] la fonction à intégrer est positive.
Les bornes sont dans l'ordre $1 < 2$.
L'intégrale est donc un nombre positif, ce qui n'est pas le cas du résultat proposé.
L'affirmation est fausse.

En temps libre, vous pouvez faire le calcul :

$$\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+1|\right]_{1}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left[(x+1)^2\right]\right]_{1}^{2} = \left[\ln(x+1)\right]_{1}^{2} = \ln 3 - \ln 2.$$

c) La forme de la fonction appelle une intégration par parties :

$$u(x) = x + \pi \quad ; \quad v'(x) = \cos x$$
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = \sin x$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$I = \left[(x+\pi)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{3\pi}{2} + \left[\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{3\pi}{2} - 1.$$

L'affirmation est fausse.

d) La fonction à intégrer est impaire. L'intervalle d'intégration est centré en 0. Dans ce cas, l'intégrale est toujours nulle.

L'affirmation est exacte.

En temps libre, vous pouvez faire le calcul en posant $u(x) = x^2$. On a alors :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

2

1. a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\cdot$

b) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$

L'intégration par parties efficace consiste à dériver le monôme et intégrer la fonction trigonométrique.

$$\begin{aligned} u(x) &= x \quad ; \quad u'(x) = 1 \\ v'(x) &= \sin(3x) \quad ; \quad v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) \end{aligned}$$

$$I_1 = \left[-\frac{x}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{9}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}\cdot$$

2. a) Pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$, on a : $x^{n+1} \leqslant x^n$ et $\sin(3x) \geqslant 0$, d'où :

$$x^{n+1}\sin(3x) \leqslant x^n \sin(3x)$$

puis par intégration sur $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$ avec $0 < \dfrac{\pi}{6}$:

$$I_{n+1} \leqslant I_n.$$

La suite (I_n) est donc décroissante.

b) Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, on a : $\sin(3x) \leqslant 1$ et $x^n \geqslant 0$, d'où :

$$0 \leqslant x^n \sin(3x) \leqslant x^n,$$

puis par intégration sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx.$$

c) On a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} = 0.$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$

3 **Réponse : B** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Éliminez immédiatement la réponse **E** car I_n est un réel précis. Il ne dépend pas d'une constante arbitraire.

L'intégration par parties efficace se fait en dérivant le monôme (avec $n \geqslant 1$) :

$$u(x) = x^n \quad ; \quad v'(x) = e^{2x}$$

$$u'(x) = n\,x^{n-1} \quad ; \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

On a donc :

$$I_n = \left[\frac{1}{2}x^n e^{2x}\right]_0^1 - \frac{n}{2}\int_0^1 x^{n-1}e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}I_{n-1}.$$

4 **Réponse : C** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

L'intégration par parties efficace se fait en dérivant le logarithme :

$$u(x) = \ln x \quad ; \quad v'(x) = x$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

On a donc :

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{e^2-1}{4}.$$

5 **Réponse : B** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Une brève étude de la fonction montre qu'elle est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

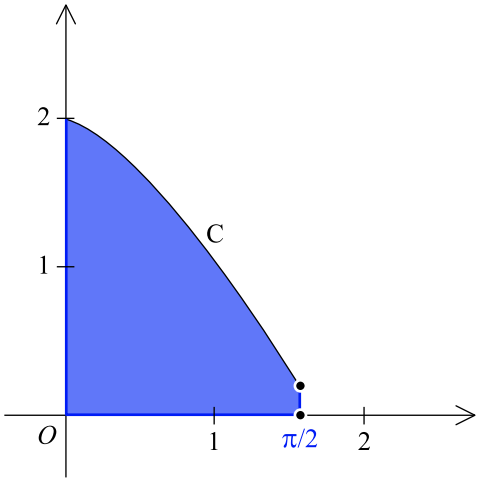

Figure 6.2

L'aire à calculer est donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}x + \cos x\right] \mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^2}{4} + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} + 1$$

ce qui est la proposition **B**.

6

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	F	F	F

a) Pour que $f(x)$ existe, il faut que $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$, ce qui est équivalent à $x\,(x+1) > 0$ et donc :

$$D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

b) Pour savoir si F est une primitive de f, on peut calculer sa dérivée :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \ln(1+x) + (1+x) \times \frac{1}{1+x} - \ln x + (1-x) \times \frac{1}{x} \\ &= \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + 1 + \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = f(x) \end{aligned}$$

Mais il y a un piège dans l'ensemble de définition.
La fonction F est définie pour $x+1>0$ et $x>0$, soit dans $]0;+\infty[$.
Elle n'est donc pas définie dans $]-\infty;-1[$, et l'affirmation est fausse.

c) Posons $\dfrac{1}{x}=X$. On a alors :

$$xf(x)=\frac{1}{X}\Big[X+\ln(1+X)\Big]=1+\frac{\ln(1+X)}{X}\cdot$$

Comme $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}xf(x)=2$.
L'affirmation est fausse.

d) Avant de se lancer dans les calculs, vérifions d'abord l'égalité pour $n=2$.
Pour le premier membre, on a :

$$\sum_{k=1}^{2}f(k)=f(1)+f(2)=1+\ln 2+\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\ln 3$$

et pour le second membre :

$$\frac{2}{2\times 3}+\ln 3=\frac{1}{3}+\ln 3.$$

L'égalité n'est donc pas vérifiée ; et l'affirmation est fausse.

7

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	V	V	F

a) On a : $G(0)=0\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et $G(1)=1\displaystyle\int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
L'affirmation est donc exacte.

b) La fonction G est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$, puisque $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Pour tout x, on a :

$$G'(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)=F(x)+xf(x).$$

L'affirmation est donc exacte.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) Comme f est positive, la valeur $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est :

- positive pour $x \in [1; +\infty[$ et G est croissante sur $[1; +\infty[$;
- négative pour $x \in [0; 1]$ et on ne peut pas trouver le signe de $G'(x)$.

On ne peut donc pas prévoir le sens de variation de G sur $[0; +\infty[$.

d) L'aire Γ et égale à :

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(0).$$

L'afirmation est donc fausse.

8

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	V	V	F

f étant la dérivée de F, quand f est positive F est croissante, quand f est négative F est décroissante.

a) Si Γ représentait $F' = f$, comme elle est à valeurs négatives de 0 à $\sqrt{\mathrm{e}}$, F serait décroissante.

Mais la courbe $\mathcal{C}$ ne représente pas une fonction décroissante sur $[0, \sqrt{\mathrm{e}}]$.

Par conséquent, Γ représente la fonction F et $\mathcal{C}$ la fonction f.

L'affirmation de l'énoncé est fausse.

b) Il suffit de lire $F(0) = 0$ sur le graphique pour confirmer l'affirmation.

c) L'aire de la surface hachurée est :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = |F(1)| = -F(1) \quad \text{car } F(1) < 0.$$

L'aire de la surface tramée est :

$$\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\sqrt{\mathrm{e}}) - F(1) = -F(1) \quad \text{car } F(\sqrt{\mathrm{e}}) = 0.$$

d) L'affirmation que $F''(0)$ existe et $F''(0) = f'(0) = 0$, signifie que la courbe $\mathcal{C}$ représentant f a une demi-tangente à l'origine, de pente nulle.

Le graphique indique plutôt une demi-tangente verticale.

L'affirmation est fausse.

9 **1. a)** On a : $g(x) - f(x) = \dfrac{\cos x}{1-\sin x} - \cos x = \dfrac{h(x)}{1-\sin x}$ avec $h(x) = \cos x \sin x$.

b) Sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, l'équation $g(x) - f(x) = 0$ est équivalente à :

$h(x) = 0 \iff \cos x = 0$ ou $\sin x = 0 \iff x \in \mathcal{S}$ avec $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$.

c) Le signe de $g(x) - f(x)$ est celui de $h(x)$ car $\sin x < 1$.

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
signe	0	$-$	0

d) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ vérifient $f(x) = g(x)$, soit $x \in \mathcal{S}$. Ce sont les points $C\left(\dfrac{3\pi}{2}; 0\right)$ et $D(2\pi; 1)$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ puisque $h(x) \leqslant 0$.

2. a) b) De $f'(x) = \sin x$, on déduit le tableau des variations de f :

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	1	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

3. a) b) De $g'(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$, on déduit le tableau des variations de g :

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

4. a) Au point C, on a $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point C une tangente T_C d'équation :

$$y = x - \frac{3\pi}{2}.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Au point D, on a $f(2\pi) = 1$ et $f'(2\pi) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point D une tangente T_D d'équation :

$$y = 1.$$

b) Au point C, on a $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet au point C une tangente T'_C d'équation :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{4}.$$

Au point D, on a $g(2\pi) = 1$ et $g'(2\pi) = 1$. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet au point D une tangente T'_D d'équation :

$$y = x - 2\pi + 1.$$

5.

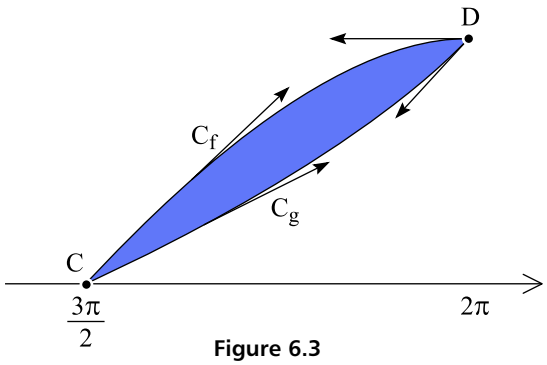

Figure 6.3

6. a) $I = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$

$J = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \, dx = \Big[-\ln|1 - \sin x|\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$

b) Voir figure ci-dessus.

10

a.	b.	c.	d.
F	V	V	V

1.

Pour calculer l'intégrale, il faut enlever la valeur absolue.

Comme $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, on a :

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x - 3| &= x^2 - 2x - 3 \quad \text{si } x \notin [-1;3] \\ &= -x^2 + 2x + 3 \quad \text{si } x \in [-1;3] \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a donc :

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 2x - 3|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1} - \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} = \frac{24}{3}\cdot$$

L'affirmation est fausse.

2.

Regardez le dénominateur.

$$I = \int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{x+1}\right]_0^1 = 1.$$

L'affirmation est vraie.

3.

La forme de la fonction fait penser à une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) &= x+1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) &= 1 \quad ; \quad v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_{-1}^{0} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{0} = \mathrm{e} - 2.$$

L'affirmation est vraie.

4. Si l'on pose $u(x) = \sqrt{x}$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$ L'intégrale à calculer s'écrit :

$$I = 2\int_1^4 u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = 2\left[\mathrm{e}^{u(x)}\right]_1^4 = 2\left[\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right) = 2\mathrm{e}\,(\mathrm{e}-1).$$

L'affirmation est vraie.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

11

a.	b.	c.	d.
V	F	F	V

1. Si l'on pose $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$. L'intégrale à calculer s'écrit :

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx = -\int_0^{\pi} u^2(x)u'(x) \, dx = -\frac{1}{3}\Big[u^3(x)\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{3}.$$

L'affirmation est vraie.

2.

Rappel : si $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

$$\int_0^{\pi} \sin(x + n\pi)\cos^2(x + n\pi) \, dx = -\frac{1}{3}\Big[\cos^3(x + n\pi)\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}\Big[(-1)^{n+1} - (-1)^n\Big].$$

On a donc : $I = \frac{2}{3}$ si n est pair, $I = -\frac{2}{3}$ si n est impair.

L'affirmation est fausse.

3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3}\Big[\cos^3 x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

L'affirmation est fausse.

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\cos^2(2x) \, dx = -\frac{1}{6}\Big[\cos^3(2x)\Big]_0^{\pi} = 0.$

L'affirmation est vraie.

12

a.	b.	c.	d.
V	F	F	F

a) Pour supprimer la valeur absolue, on distingue des intervalles.

$$\int_0^2 (x-1)|x-1|\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (x-1)^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2+2x-1\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2-x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^2 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0.$$

L'affirmation est vraie.

b) Pour intégrer $\sin^2 x$, on linéarise, c'est-à-dire qu'on utilise la forme où il n'y a pas de puissance :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right].$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

L'affirmation est fausse.

c) Si l'on pose $u(x) = \ln x$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$ L'intégrale à calculer s'écrit :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} u(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[u^2(x)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\cdot$$

L'affirmation est fausse.

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\left[\ln|1-x|\right]_2^3 = -\left[\ln(x-1)\right]_2^3 = -\ln 2.$

L'affirmation est fausse.

Si vous avez répondu V, c'est que vous avez oublié que la dérivée de $1-x$ est -1 et non pas 1.

Vous pouviez aussi remarquer que la fonction à intégrer est négative sur l'intervalle d'intégration, et que l'intégrale est un nombre négatif.

13

a.	b.	c.	d.
F	V	V	F

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Pour tout réel x, on a :

$$f(x+\pi) = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq f(x).$$

L'affirmation est fausse.

En fait, la fonction f est bien périodique. Mais sa plus petite période positive est 4π.

b) On a :

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 2;$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 2.$$

L'affirmation est vraie.

c) On a :

$$\int_0^{4\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{4\pi} = 0.$$

L'affirmation est vraie.

d) On a vu que : $\displaystyle\int_0^{4\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle 4\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 8.$

L'affirmation est fausse.

14 **Réponse : B** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Vous pouvez tâtonner en dérivant les fonctions proposées, en espérant que la bonne réponse arrive le plus vite possible.

Mais il est plus raisonnable de faire le calcul par parties en dérivant le polynôme :

$$\begin{array}{lll} u(x) = 3-2x & ; & u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = -2 & ; & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

On peut donc choisir (à une constante additive près) :

$$\begin{aligned} G(x) &= -(3-2x)\,\mathrm{e}^{-x} - \int 2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -(3-2x)\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Nombres complexes 7

Thèmes du chapitre

Forme algébrique d'un nombre complexe. Plan complexe, affixe, image.

Conjugué d'un nombre complexe. Forme trigonométrique, module, argument. Exponentielle complexe.

Équation du second degré à coefficients réels.

Nombres complexes et géométrie.

Des savoir-faire à maîtriser

- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique pour un nombre complexe non nul.

Si $z = a + \mathrm{i}\,b$, avec a et b réels, est la forme algébrique du nombre complexe z, son module est $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et un argument θ est défini par :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot$$

On passe donc à la forme trigonométrique en calculant ρ, puis en le mettant en facteur, ce qui donne : $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

- Dans le plan complexe, modules et distances sont liés par : $|z_A - z_B| = BA$.
- La rotation de centre A et d'angle θ transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que :

$$z' - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_A).$$

Des réflexes à avoir

- Pour calculer z^n avec $n \in \mathbb{N}$, la forme trigonométrique de z est préférable pour $n \geqslant 3$.
- Pour calculer un quotient $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ vous pouvez :

– obtenir la forme algébrique de Z en multipliant et en divisant par le conjugué $\overline{z_2}$;

– obtenir la forme trigonométrique de Z en écrivant d'abord z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

- Pour des questions sur des propriétés géométriques dans le plan complexe (distances, angles, orthogonalité) faites un dessin.

C'est insuffisant pour une démonstration, mais c'est peut-être suffisant pour répondre dans le cadre d'un QCM.

1 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Soit les nombres complexes $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $b = 1 + \mathrm{i}$.

a) Un argument de a est $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) Le module du nombre $\dfrac{a}{b}$ est 2.

c) Le nombre a^3 est un nombre imaginaire pur.

d) Le nombre $a^3 b^2$ est un nombre réel.

2 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, soit le point A d'affixe i.

On considère la fonction T qui associe à tout point M, différent de A et d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}}{2(z - \mathrm{i})}.$$

Alors l'image par T du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 est :

A : le cercle de centre O et de rayon 0,5 ;

B : le cercle de centre O et de rayon 2 ;

C : le cercle de centre A et de rayon 0,5 ;

D : le cercle de centre A et de rayon 1 ;

E : le cercle de centre A et de rayon 2.

3 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

On considère, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points M et N d'affixes respectives :

$$z_M = 1 + 2\,\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_N = 3 + 2\,\mathrm{i}.$$

Le milieu I du segment $[MN]$ a pour image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ le point J. Donner l'affixe de J.

A : $z_J = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$;

B : $z_J = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{11\mathrm{i}\pi}{12}}$;

C : $z_J = 4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$;

D : $z_J = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$;

E : $z_J = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$.

4 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.
On considère trois points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad z_B = 1+\mathrm{i}\quad\text{et}\quad z_C = 2\,\mathrm{i}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

a) On a $\arg(z_C) = \dfrac{\pi}{12}$.

b) L'écriture algébrique de $\dfrac{z_A}{z_B}$ est : $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c) L'écriture trigonométrique de $\dfrac{z_A}{z_B}$ est : $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

d) On a : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{\sqrt{2}}$.

5 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

On considère deux réels a et b et l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^4 + a\,z^3 + b\,z^2 + a\,z + 1 = 0. \qquad (E)$$

a) Si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ le sont aussi.

b) Si $1+2\,\mathrm{i}$ est solution de (E) alors $\dfrac{1}{1-2\,\mathrm{i}}$ aussi.

c) Le changement de variable $Z = z+\dfrac{1}{z}$ conduit à résoudre :

$$Z^2 + a\,Z + b = 0. \qquad (E)'$$

d) On peut factoriser l'expression $z^4 + a\,z^3 + b\,z^2 + a\,z + 1$ par deux polynômes de degré deux à coefficients réels.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

6 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On appelle A le point d'affixe 2, B le point d'affixe $-3-\mathrm{i}$ et C le point d'intersection de (OB) avec la médiatrice de $[OA]$.
On considère dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (E_1) et (E_2) :

$$(E_1):\ |z|=|z-2| \qquad ; \qquad (E_2):\ \arg(z)=\arg(z+3+\mathrm{i}).$$

a) L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie (E_1) est la médiatrice de $[OA]$.

b) L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie (E_2) est le segment $[OB]$, exclusion faite de O et B.

c) L'affixe du point C vérifie simultanément (E_1) et (E_2).

d) Le point C a pour coordonnées $\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

7 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Pour tout nombre complexe z, $\arg(z)$ désigne un argument de z. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z. On pose $Z=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}$.

a) L'ensemble des points M tels que Z soit réel est une droite.

b) L'ensemble des points M tels que $|Z|=1$ est un cercle.

c) L'ensemble des points M tels que $Z\,\overline{Z}=4$ est une droite.

d) L'ensemble des points M tels que $\arg(Z)=0$ (modulo π) est un cercle.

e) L'ensemble des points M tels que $Z-\overline{Z}=0$ est une droite.

8 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Dans le plan complexe de repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ orthonormal direct, soit T l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $T(z)=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})z$
et soit A, B, C et D les points d'affixes respectives 1, $T(1)$, $T\circ T(1)$, $T\circ T\circ T(1)$.

a) Le point C est d'affixe $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

b) Le triangle ABC est isocèle.

c) Le triangle BCD est rectangle en B.

d) Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC a pour affixe 0.

9 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A d'affixe i, M d'affixe z et M' d'affixe z' avec $z' \neq z$.

On appelle : h l'homothétie de centre A et de rapport 2 ;

t la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$;

r la rotation de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Si $M' = h(M)$, alors $z' = 2z - \mathrm{i}$.

b) Si $M' = t(M)$, alors $z' = z - \mathrm{i}$.

c) Si $M' = r(M)$, alors A appartient à la médiatrice de $[MM']$.

d) Soit B le point d'affixe $4 - 3\,\mathrm{i}$. Le point $B' = r(B)$ a pour affixe $3 + 4\,\mathrm{i}$.

10 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = -\sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{15}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Un argument de a^n est $\dfrac{2n\pi}{3}$.

b) O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

c) OAB est un triangle rectangle en O.

d) Le cercle circonscrit à OAB a pour rayon 3.

11 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et $2\,\mathrm{i}$. On désigne par :

(E) l'ensemble des points M d'affixes z telles que $|z - 2\,\mathrm{i}| = |z - 1|$;

(F) l'ensemble des points M, distincts de A et B, d'affixes z telles que

$$\arg\left(\frac{z - 2\,\mathrm{i}}{z - 1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

a) (E) est un cercle.

b) Les points M de (F) décrivent un cercle sauf deux points.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) Le point C d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ appartient à (E) et à (F).

d) (F) est aussi l'ensemble des points M tels que le complexe $Z=\dfrac{z-2\,\mathrm{i}}{z-1}$ soit un nombre imaginaire pur.

12 EPF 2008

On cherche des nombres complexes a, b et c qui vérifient les relations :

$$(R):\qquad |a|=|b|=|c|=1 \quad \text{et} \quad a+b+c=0.$$

1. Montrer que si a, b et c vérifient les relations (R), alors a, b et c sont non nuls.

2. On pose $b'=\dfrac{b}{a}$ et $c'=\dfrac{c}{a}\cdot$

a) Traduire les relations (R) en utilisant les formes trigonométriques des nombres b' et c'.

b) Montrer qu'alors $\mathrm{Re}\,(b')=\mathrm{Re}\,(c')=-\dfrac{1}{2}\cdot$

c) En déduire les nombres complexes b' et c' tels que a, b et c vérifient les relations (R).

3. Montrer qu'il existe une infinité de triplets (a,b,c) de nombres complexes vérifiant les relations (R).

13 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Pour tout nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z et $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

Dans le plan complexe, on considère le demi-plan tramé Π figure 7.1, droite incluse.

Π est l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

a) $\mathrm{Im}(z)\leqslant \mathrm{Re}\big[(1+\mathrm{i})z\big]$

b) $\mathrm{Im}(z)\leqslant \mathrm{Im}\big[(1+\mathrm{i})\overline{z}\big]$

c) $|z-5|\leqslant |z-3-4\mathrm{i}|$

d) $|z+4-3\mathrm{i}|\leqslant |z+5\mathrm{i}|$

e) $|z-1+2\mathrm{i}|\leqslant |z+1-2\mathrm{i}|$

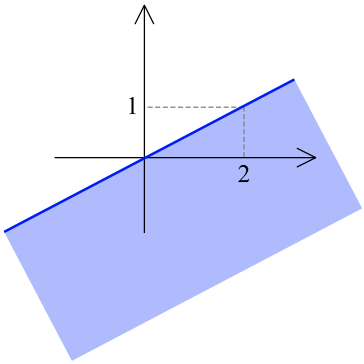

Figure 7.1

14 GEIPI-Polytech 2008

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé, on considère les points A, I et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 \ ; \ z_I = 2 \ ; \ z_B = 3.$$

Pour tout complexe z, différent de 2, on pose :

$$z' = \frac{1}{z-2} + 2.$$

On considère la fonction F qui à tout point M du plan, différent de I et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

1. Déterminer l'ensemble E des points M tels que $F(M) = M$. Justifier la réponse.

2. a) Calculer, en fonction de z, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

b) En déduire une relation entre les longueurs IM et IM' et une relation entre les angles $\left(\vec{u};\overrightarrow{IM}\right)$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{IM'}\right)$.

3. On considère un point M différent de I, de A et de B. Soit z son affixe.

a) Donner le réel β qui vérifie :

$$\frac{1-z'}{3-z'} = \beta\,\frac{1-z}{3-z}\,.$$

b) En déduire une relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$ et une relation entre les angles $\left(\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A}\right)$ et $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)$.

c) On suppose dans cette question que M appartient à la médiatrice $\triangle$ du segment [AB]. Que peut on en déduire pour le point M' ? Justifier la réponse.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

15 GEIPI 2007

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et F d'affixes respectives :

$$z_A = 4+4\,\mathrm{i} \;\;;\;\; z_B = 4 \;\;;\;\; z_C = 7 \;\;;\;\; z_F = 4+3\,\mathrm{i}$$

On désigne par E le point d'intersection des droites (AC) et (OF).

Partie A

1. Faire une figure complète.

2. a) Calculer $\dfrac{z_F}{z_A - z_C}$ sous forme algébrique.

b) Que peut-on déduire de la question précédente pour les droites (OF) et (AC) ? Justifier la réponse.

3. On veut vérifier que le point F est le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(O;3),(A;\alpha),(C;25-\alpha)\}$$

où α est un réel.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OF}$ en fonction de α, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.

b) Déterminer la valeur de α.

4. Le point E d'intersection des droites (AC) et (OF) est barycentre du système $\{(A;\beta),(C;4)\}$. Déterminer la valeur de β.

Partie B

On considère les cercles suivants :

- le cercle $\mathcal{C}_1$, circonscrit au triangle BOF, de centre Ω_1 et de rayon r_1 ;
- le cercle $\mathcal{C}_2$, circonscrit au triangle OEC, de centre Ω_2 et de rayon r_2 ;
- le cercle $\mathcal{C}_3$, circonscrit au triangle ABC, de centre Ω_3 et de rayon r_3 ;
- le cercle $\mathcal{C}_4$, circonscrit au triangle AEF, de centre Ω_4 et de rayon r_4.

1. Donner les affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 des points Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4.

Calculer r_1, r_2, r_3 et r_4.

2. Calculer $z_3 - z_4$ et $z_2 - z_1$ sous forme algébrique.

Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$?

3. Calculer $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}$ sous forme algébrique.

Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$?

Corrigés

1

a.	b.	c.	d.
F	F	F	F

Transformez d'abord les écritures des nombres complexes a et b :

$$a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$$b = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

a) Un argument de a est $\dfrac{\pi}{3}$.

b) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

c) $a^3 = 2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -8.$

d) De $b^2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i}$, on déduit : $a^3b^2 = -16\,\mathrm{i}$.

2

Réponse : A (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 est l'ensemble des points M tels que $AM = 1$, ce qui signifie sur les affixes : $|z - \mathrm{i}| = 1$.

On a alors : $|z'| = \dfrac{|\mathrm{i}|}{2|z - \mathrm{i}|} = \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 0,5. Vous pouvez donc cocher la réponse **A**.

En temps libre, vous pouvez vous demander si tout le cercle est atteint. Comme :

$$z' = \frac{\mathrm{i}}{2(z - \mathrm{i})} \iff z = \mathrm{i}\,\frac{1 + 2z'}{2z'}$$

si $|z'| = 0{,}5$, alors z existe et $|z - \mathrm{i}| = \left|\dfrac{\mathrm{i}}{2z'}\right| = 1$ ce qui signifie que l'image cherchée est bien le cercle en entier.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3 **Réponse : D** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = 2 + 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ donne pour un point quelconque :

$$z_{M'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z_M, \text{ soit pour } I : z_J = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z_I = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

La réponse correcte est donc **D**.

4

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	V	V	V

a) On a : $z_C = 2\,\mathrm{i}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\left(-\sin\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$$

z_C a donc pour argument $\dfrac{7\pi}{12}$ et la réponse proposée est fausse.

Si vous avez répondu « vraie », c'est que vous avez oublié de repérer le nombre i qui est en facteur.

b)

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient à partir des formes algébriques, multipliez et divisez par le conjugué du dénominateur.

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\,(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

c)

Pour obtenir la forme trigonométrique d'un quotient, écrivez d'abord le numérateur et le dénominateur sous forme trigonométrique et utilisez :

$$\frac{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}.$$

$z_A = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. $\quad z_B = 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

d)

Si M est l'affixe de z, la longueur OM est le module de z.

On a déjà vu que $OA = |z_A| = 2$, $OB = |z_B| = \sqrt{2}$ et $OC = |z_C| = 2$.
L'égalité annoncée est donc vraie.

5

a.	b.	c.	d.
V	V	F	V

a)

Remarquons tout d'abord qu'une solution de (E) ne peut pas être nulle, sinon on aurait $1 = 0$ en remplaçant !

Si z_0 est solution de (E), on a :

$$z_0^4 + a\,z_0^3 + b\,z_0^2 + a\,z_0 + 1 = 0.$$

- En prenant le conjugué (on sait que a et b sont réels), on a alors :

$$\overline{z_0}^4 + a\,\overline{z_0}^3 + b\,\overline{z_0}^2 + a\,\overline{z_0} + 1 = 0,$$

ce qui montre que $\overline{z_0}$ est solution de (E).

- En divisant par z_0^4, on a :

$$1 + a\,\frac{1}{z_0} + b\,\frac{1}{z_0^2} + a\,\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_0^4} = 0,$$

ce qui montre que $\dfrac{1}{z_0}$ est solution de (E).

b)

Cette question est une suite de la question précédente.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

D'après la question **a)**, si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E). Si $\overline{z_0}$ est solution de (E), alors $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ est solution de (E).

En considérant $z_0 = 1 + 2\,\mathrm{i}$, c'est l'énoncé de la question.

Attention au mot « si ». On ne sait pas si $1 + 2\,\mathrm{i}$ est solution de (E). Il n'y a d'ailleurs aucune raison que ce soit vrai pour a et b quelconques.

c)

On va vous aider à se ramener à des équations du second degré, les seules que vous sachiez résoudre.

Si $Z = z + \dfrac{1}{z}$ alors $Z^2 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2}$.

On est ainsi guidé pour transformer l'équation (E) après avoir divisé par z^2 :

$$z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + a\left(z + \frac{1}{z}\right) + b - 2 = 0,$$

soit :

$$Z^2 + a\,Z + b - 2 = 0,$$

ce qui n'est pas la forme proposée.

Si vous avez répondu « vrai », c'est que vous avez oublié le double produit dans le développement de Z^2.

d)

Cette question déborde le programme de Terminale. Pour y répondre, on va admettre qu'un polynôme a toujours au moins une racine complexe z_0, et aussi que, si $P(z_0) = 0$, on peut mettre $z - z_0$ en facteur dans $P(z)$.

Soit z_0 une racine du polynôme $P(z) = z^4 + a\,z^3 + b\,z^2 + a\,z + 1$.

On a alors vu que $\overline{z_0}$, $\dfrac{1}{z_0}$ et $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ sont aussi racines. On peut donc écrire :

$$P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})\left(z - \frac{1}{z_0}\right)\left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right).$$

En développant, les polynômes $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ et $\left(z - \dfrac{1}{z_0}\right)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z_0}}\right)$ dont les racines sont conjuguées, sont alors à coefficients réels.

C'est un résultat général (hors du programme de Terminale) : un polynôme à coefficients réels peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 avec $\triangle < 0$.

6

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	F	V

Faites un dessin pour répondre rapidement aux questions.

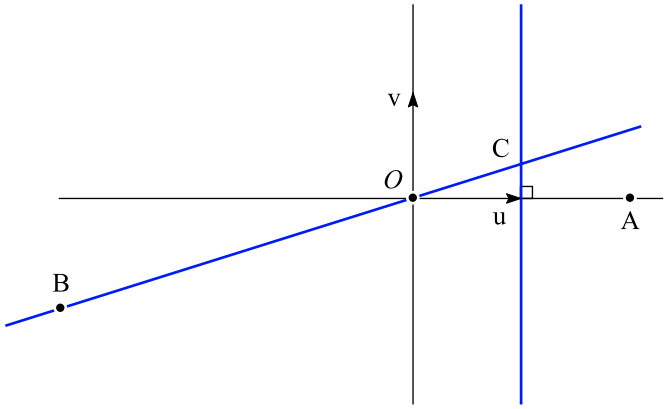

Figure 7.2

a) Le module $|z|$ est la longueur OM et $|z-2|$ la longueur AM.
L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie (E_1) est donc l'ensemble des points équidistants de O et de A, c'est-à-dire la médiatrice de $[OA]$.

b) On a $\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ à condition que $M \neq O$ et $\arg(z+3+\mathrm{i}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB})$ à condition que $M \neq B$.
L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie (E_2) est donc caractérisé par

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) = 0.$$

Il s'agit de la demi-droite d'origine O, passant par B, privée des points O et B.

c) Le point C n'est pas sur la demi-droite de la question **b)**. L'affixe de C ne vérifie donc pas (E_2).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d) Votre dessin vous donne directement la réponse : gagnez du temps !

En temps libre, en posant $z = x + \mathrm{i}y$, l'équation (E_1) donne $x = 1$; l'équation (E_2) signifie que $\dfrac{z+3+\mathrm{i}}{z}$ est un réel positif. En annulant la partie imaginaire, on obtient $x - 3y = 0$, d'où $y = \dfrac{1}{3}$ et on vérifie que la partie réelle est positive.

7

a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
V	F	F	F	V

Si $z = x + \mathrm{i}y$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur on a :

$$Z = \frac{x + \mathrm{i}(-1+y)}{(x-1) + \mathrm{i}\,y} = \frac{(x^2 - x + y^2 - y) + \mathrm{i}\,(-x + 1 - y)}{(x-1)^2 + y^2}$$

mais l'écriture initiale de Z est plus commode pour écrire

$$|Z| = \frac{|z - \mathrm{i}|}{|z - 1|} = \frac{MB}{MA}$$

où A est l'image de 1 et B l'image de i.

a) Dire que Z est réel, c'est dire que sa partie imaginaire est nulle, ce qui s'écrit :

$$-x - y + 1 = 0.$$

L'ensemble des points M concernés est donc une droite.

b) La condition $|Z| = 1$ s'écrit $MA = MB$. L'ensemble des points M concernés est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

Si vous avez répondu « vraie », vous avez peut-être confondu avec $|z| = 1$ qui représente le cercle trigonométrique.

c) La condition $Z\overline{Z} = 4 = |Z|^2$ s'écrit :

$$|z - \mathrm{i}|^2 = 4|z - 1|^2$$

c'est-à-dire, après calculs et simplifications :

$$3x^2 + 3y^2 - 8x + 2y + 3 = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle, ou l'ensemble vide. Vous pouvez donc répondre « faux ».

Prenons le temps de préciser ce cercle :

$$x^2 - \frac{8}{3}x + y^2 + \frac{2}{3}y + 1 = 0 \iff \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\cdot$$

Il s'agit donc du cercle de centre $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot$

d) • Avec la signification angulaire de l'argument d'un quotient, on a :

$$\arg(Z) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}).$$

L'ensemble des points M cherché est donc la droite (AB).

• On peut aussi remarquer que la condition $\arg(Z) = 0$ (modulo π) est équivalente à Z réel. Dans la question **a)**, on a déjà obtenu dans ce cas l'équation :

$$x + y - 1 = 0$$

qui est bien une équation de la droite (AB).

e) La condition $Z = \overline{Z}$ est une nouvelle écriture de Z réel. L'ensemble des points cherchés est la droite (AB).

8

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	F	V	F

Faites un dessin pour répondre rapidement aux questions posées.

Comme $T(z) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} z$, on passe d'un point M au point suivant en faisant tourner OM d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ et en multipliant la longueur par 2.

On obtient en particulier $T \circ T \circ T(1) = 2^3 = 8$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

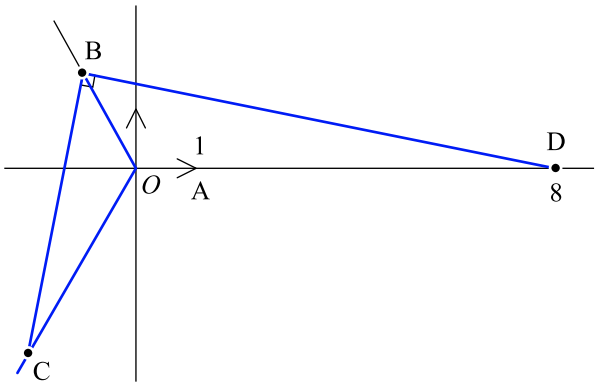

Figure 7.3

En temps libre, vous pouvez calculer les affixes :

$$z_A = 1 \ ; \ z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \ ; \ z_C = -2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} \ ; \ z_D = 8,$$

les longueurs toutes distinctes :

$$AB = \sqrt{7} \ ; \ BC = 3\sqrt{7} \ ; \ CA = \sqrt{21},$$

les affixes $-1 - 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ de $\overrightarrow{BC}$, $9 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ de $\overrightarrow{BD}$ et le produit scalaire :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = -9 + 9 = 0$$

les longueurs toutes distinctes :

$$OA = 1 \ ; \ OB = 2 \ ; \ OC = 4,$$

et confirmer ainsi votre réponse rapide.

9

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	F

a) L'homothétie h transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' de sorte que :

$$z' - \mathrm{i} = 2(z - \mathrm{i}).$$

On a donc $z' = 2z - \mathrm{i}$ et l'affirmation de l'énoncé est vraie.

b) La translation t transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' de sorte que :

$$z' = z + \mathrm{i}.$$

L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.

c) La rotation r étant de centre A, on a l'égalité des longueurs $AM = AM'$.
Le point A équidistant de M et de M' appartient donc à la médiatrice de $[MM']$.

d) La rotation r transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' de sorte que :

$$z' - \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - \mathrm{i}) = \mathrm{i}(z - \mathrm{i}) = \mathrm{i}\,z + 1.$$

On a donc $z' = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$ et l'affirmation de l'énoncé est fausse.

Autre solution : en notant B' le point d'affixe $3 + 4\,\mathrm{i}$, on a :

$$AB = |4 - 4\,\mathrm{i}| = 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad AB' = |3 + 3\,\mathrm{i}| = 3\sqrt{2}.$$

Ces longueurs n'étant pas égales, B' ne peut pas être l'image de B dans une rotation de centre A.

10

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	V

a) Écrivons d'abord le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

Son module est : $|a| = \sqrt{5 + 15} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Il admet pour argument θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut donc choisir $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et en déduire : $\arg(a^n) = n \arg(a) = \dfrac{2\,n\,\pi}{3}$.

b) Calculons les longueurs : $OA = |a| = 2\sqrt{5}$ et $OB = |b| = 4$.

Le point O n'est pas équidistant de A et de B. Il n'appartient pas à la médiatrice de $[AB]$.

c) Le nombre complexe b admet pour argument θ' tel que :

$$\cos\theta' = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin\theta' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On peut donc choisir $\theta' = \dfrac{\pi}{6}$ puis calculer l'angle :

$$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg(a) - \arg(b) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Le triangle OAB est donc rectangle en O.

d) Le triangle OAB étant rectangle en O, le cercle circonscrit à OAB a pour diamètre $[AB]$ et pour rayon :

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\left|(2\sqrt{3}+\sqrt{5}) + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{15})\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 + (2-\sqrt{15})^2} = 3.$$

L'affirmation de l'énoncé est donc vraie.

11

a.	b.	c.	d.
F	F	V	F

a) • L'égalité des modules $|z-2\,\mathrm{i}| = |z-1|$ est équivalente à l'égalité des longueurs $BM = AM$.

L'ensemble (E) est donc l'ensemble des points M équidistants de A et de B. C'est la droite médiatrice de $[AB]$.

L'affirmation de l'énoncé est fausse.

• Autre solution (plus longue, mais c'est mieux que rien !)

En écrivant $z = x + \mathrm{i}y$, la condition $|x + \mathrm{i}(y-2)| = |(x-1) + \mathrm{i}y|$ est équivalente à l'égalité des carrés :

$$x^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + y^2 \iff 2x - 4y + 3 = 0.$$

On obtient bien une droite.

b) Pensez géométrie. Évitez les calculs.

Avec la signification angulaire de l'argument d'un quotient, la condition qui définit l'ensemble (F) s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

C'est la caractérisation d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

L'affirmation de l'énoncé est fausse. Elle aurait été vraie si on avait eu $k\pi$ au lieu de $2k\pi$.

c) Vous pouvez faire tous les calculs pour montrer que l'affixe de C vérifie bien les conditions qui définissent (E) et (F). Mais vous feriez mieux de faire un dessin :

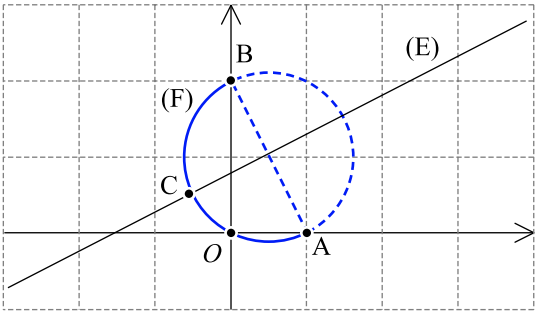

Figure 7.4

d) La condition qui définit (F) s'écrit aussi :

$$Z = \frac{z - 2\,\mathrm{i}}{z - 1} = \mathrm{i}\,b \qquad \text{avec } \ b \in]0;+\infty[.$$

Il n'y a donc pas tous les imaginaires purs.

12 **1.** Les nombres complexes cherchés sont de module 1. Ils sont donc non nuls.

2. a) Les relations (R) se traduisent par :

$$|b'| = |c'| = 1 \quad et \quad b' + c' = -1$$

ou, avec la forme trigonométrique de b' et de c' :

$$b' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \quad ; \quad c' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$
$$\cos\theta + \cos\varphi = -1 \quad ; \quad \sin\theta + \sin\varphi = 0$$

b) De $\sin\theta = -\sin\varphi = \sin(-\varphi)$, on déduit : $\theta = -\varphi$ ou $\theta = \pi + \varphi$.

Dans le premier cas, on obtient : $\cos\theta = \cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$

soit $\mathrm{Re}(b') = \mathrm{Re}(c') = -\dfrac{1}{2}$.

Dans le second cas, on obtient : $\cos\theta - \cos\theta = -1$, ce qui est impossible.

c) Des résultats obtenus sur le module et la partie réelle, on déduit (dans un ordre arbitraire) :

$$b' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad et \quad c' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3. On a donc :

$$b = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad c = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},$$

avec a quelconque tel que $|a| = 1$.
Il existe donc une infinité de solutions, correspondant à tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle unité.

13

a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
V	V	V	F	V

Le demi-plan tramé est limité par la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$. Il correspond à l'inéquation $y \leqslant \dfrac{1}{2}x$ ou $x - 2y \geqslant 0$.

a) Soit $z = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels).
On a : $(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y)$.
On a donc les équivalences :

$$\mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Re}\big[(1+\mathrm{i})z\big] \iff y \leqslant x - y \iff x - 2y \geqslant 0$$

ce qui correspond bien à l'ensemble des points de Π.

b) Comme $(1+\mathrm{i})\overline{z} = (1+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) = (x+y) + \mathrm{i}(x-y)$, on a les équivalences :

$$\mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Im}\big[(1+\mathrm{i})\overline{z}\big] \iff y \leqslant x - y \iff x - 2y \geqslant 0$$

et on retrouve la caractérisation des points de Π.

Dans la suite, pour étudier la validité des inégalités sur les modules, il vaut mieux comparer leurs carrés.

c) On a : $|z-5|^2 = (x-5)^2 + y^2$ et $|z-3-4\mathrm{i}|^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$.
L'inégalité proposée est équivalente à :

$$(x-5)^2 + y^2 \leqslant (x-3)^2 + (y-4)^2 \iff 0 \leqslant 4x - 8y \iff x - 2y \geqslant 0,$$

et on retrouve la caractérisation des points de Π.

d) On a : $|z+4-3\mathrm{i}|^2 = (x+4)^2+(y-3)^2$ et $|z+5\mathrm{i}|^2 = x^2+(y+5)^2$.
L'inégalité proposée est équivalente à :

$$(x+4)^2+(y-3)^2 \leqslant x^2+(y+5)^2 \iff 0 \leqslant -8x+16y \iff x-2y \leqslant 0.$$

Ce n'est donc pas le demi-plan Π.

e) On a : $|z-1+2\mathrm{i}|^2 = (x-1)^2+(y+2)^2$ et $|z+1-2\mathrm{i}|^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$.
L'inégalité proposée est équivalente à :

$$(x-1)^2+(y+2)^2 \leqslant (x+1)^2+(y-2)^2 \iff 0 \leqslant 4x-8y \iff x-2y \geqslant 0,$$

et on retrouve la caractérisation des points de Π.

14

1. Un point M tel que $F(M) = M$ a son affixe z qui vérifie :

$$z = \frac{1}{z-2}+2 \iff z^2-4z+3 = 0 = (z-1)(z-3) \iff z = 1 \text{ ou } z = 3.$$

L'ensemble de ces points est donc : $\mathcal{E} = \{A, B\}$.

2. a) Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour affixe : $z-2$. Le vecteur $\overrightarrow{IM'}$ a pour affixe : $z'-2 = \dfrac{1}{z-2}$.

b) On a donc :

- pour les longueurs : $IM = |z-2|$ et $IM' = |z'-2| = \dfrac{1}{IM}$;
- pour les angles : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM}\right) = \arg(z-2) = -\arg(z'-2) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right)$.

3. a) On a :

$$\frac{1-z'}{3-z'} = \frac{1-\dfrac{1}{z-2}-2}{3-\dfrac{1}{z-2}-2} = \frac{-z+1}{z-3} = -\frac{1-z}{3-z}$$

c'est-à-dire $\beta = -1$.

b) On en déduit :

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{|1-z'|}{|3-z'|} = \left|\frac{1-z}{3-z}\right| = \frac{MA}{MB}$$

$$\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) = \arg\left(\frac{1-z'}{3-z'}\right) = \pi + \arg\left(\frac{1-z}{3-z}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right).$$

c) Si M appartient à la médiatrice $\triangle$ de $[AB]$, on a : $MA = MB$.
On en déduit $M'A = M'B$, c'est-à-dire que M' appartient aussi à $\triangle$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

15 Partie A

1. La figure complète ci-dessous comporte aussi les points introduits dans la partie **B**.

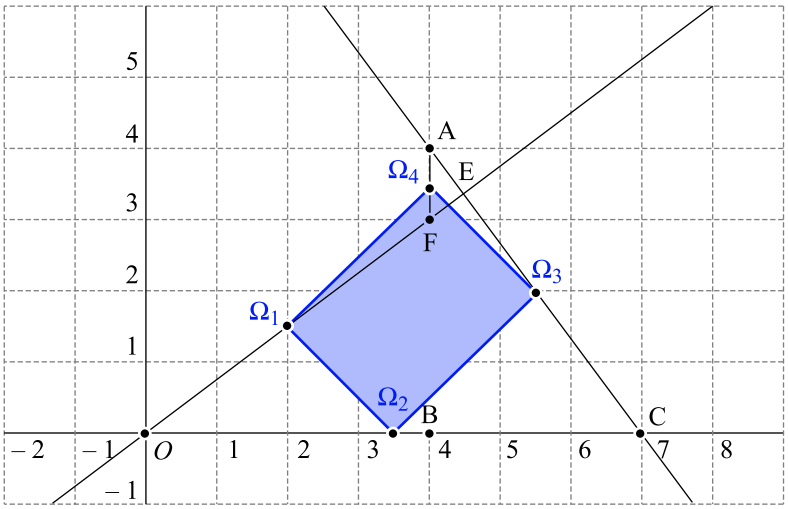

Figure 7.5

2. a) On a :

$$\frac{z_F}{z_A - z_C} = \frac{4+3\,\mathrm{i}}{-3+4\,\mathrm{i}} = \frac{(4+3\,\mathrm{i})(-3-4\,\mathrm{i})}{9+16} = -\mathrm{i}.$$

b) En terme angulaire, le calcul précédent donne :

$$\arg\left(\frac{z_F}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot$$

Les droites (OF) et (AC) sont donc perpendiculaires.

3. a) La somme des coefficients n'étant pas nulle, le barycentre F existe et l'on a :

$$\forall M \qquad 3\,\overrightarrow{MO} + \alpha\,\overrightarrow{MA} + (25-\alpha)\,\overrightarrow{MC} = 28\,\overrightarrow{MF}.$$

En choisissant $M = O$, on a donc :

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha}{28}\,\overrightarrow{OA} + \frac{25-\alpha}{28}\,\overrightarrow{OC}.$$

b) Avec des nombres complexes, cela signifie :

$$4+3\,\mathrm{i} = \frac{\alpha}{28}(4+4\,\mathrm{i}) + \frac{25-\alpha}{28} \times 7$$

ce qui est possible si, et seulement si, $\alpha = 21$.

4. On a obtenu :

$$\overrightarrow{OF} = \frac{21}{28}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{28}\overrightarrow{OC}.$$

Le point E appartenant à la droite (AC) est barycentre du système $\{(A,\beta);(C,4)\}$. On a donc :

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\beta}{\beta+4}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{\beta+4}\overrightarrow{OC}.$$

Le point E appartenant à la droite (OE), les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires, ce qui est possible si, et seulement si, $\beta = 21$.

Partie B

1. Le triangle BOF est rectangle en B. Le cercle $\mathcal{C}_1$ admet donc $[OF]$ comme diamètre.

Son centre Ω_1 est le milieu de $[OF]$, soit $z_1 = 2 + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$ et son rayon est $r_1 = \frac{1}{2}OF = \frac{5}{2}$.

Le triangle OEC est rectangle en E. Le cercle $\mathcal{C}_2$ admet donc $[OC]$ comme diamètre.

Son centre Ω_2 est le milieu de $[OC]$, soit $z_2 = \frac{7}{2}$ et son rayon est $r_2 = \frac{1}{2}OC = \frac{7}{2}$.

Le triangle ABC est rectangle en B. Le cercle $\mathcal{C}_3$ admet donc $[AC]$ comme diamètre.

Son centre Ω_3 est le milieu de $[AC]$, soit $z_3 = \frac{11}{2} + 2\,\mathrm{i}$ et son rayon est $r_3 = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

Le triangle AEF est rectangle en E. Le cercle $\mathcal{C}_4$ admet donc $[AF]$ comme diamètre.

Son centre Ω_4 est le milieu de $[AF]$, soit $z_4 = 4+\frac{7}{2}\,\mathrm{i}$ et son rayon est $r_4 = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}$.

2. On a : $z_3 - z_4 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} = z_2 - z_1$.

L'égalité de ces nombres complexes signifie que $\overrightarrow{\Omega_3\Omega_4} = \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$, ce qui démontre que $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ est un parallélogramme.

3. On a : $\arg\left(\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega_4\Omega_1}, \overrightarrow{\Omega_4\Omega_3}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Le parallélogramme $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ a donc un angle droit : c'est un rectangle.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8 Géométrie dans le plan

Thèmes du chapitre

Droite, équations cartésiennes, équations paramétriques.
Orthogonalité, distance d'un point à une droite, médiatrice d'un segment, cercle.
Barycentres.

Des savoir-faire à maîtriser

- Dans un repère orthonormé, la distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B. C'est aussi la droite perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par le milieu de $[AB]$.
- Un système de points pondérés $\{(A_1; a_1), \ldots, (A_n; a_n)\}$ admet un barycentre G si, et seulement si, $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$. Le point G vérifie alors pour tout M :

$$(a_1 + \cdots + a_n)\,\overrightarrow{MG} = a_1\,\overrightarrow{MA_1} + \cdots + a_n\,\overrightarrow{MA_n}.$$

Bien choisir M, c'est souvent répondre à la question.

Des réflexes à avoir

- Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

- Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.
- Un segment $[AB]$, c'est l'ensemble des barycentres des points A et B avec des coefficients positifs.

1 EPF 2008

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé.
Soit A et B deux points distincts de (P) d'abscisses respectives a et b. On suppose que $a < b$.

1. Pour tout point M de (P) d'abscisse x (on suppose $a < x < b$), calculer la distance du point M à la droite (AB).

2. En déduire qu'il existe un point M_0 de la parabole (P) d'abscisse comprise entre a et b tel que l'aire du triangle M_0AB soit maximale. Déterminer son abscisse.

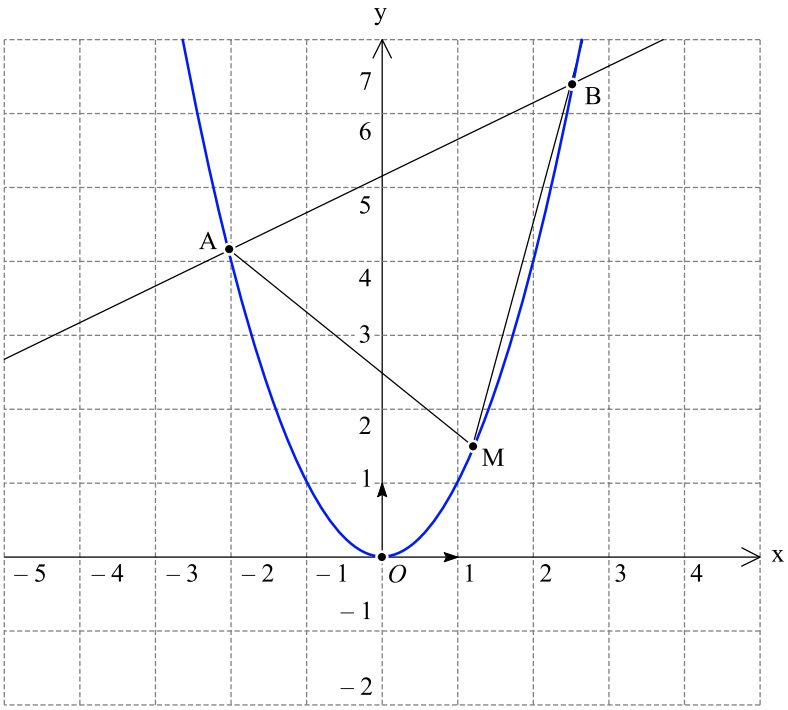

Figure 8.1

2 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite $\triangle$ d'équation $2x - y + 2 = 0$ et le point $I(1; 1)$.

Alors :

a) $H(0; 2)$ est le projeté orthogonal de I sur $\triangle$.

b) $J(-1; 3)$ est le symétrique de I par rapport à $\triangle$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) La distance de I à $\triangle$ est égale à $\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$.

d) La perpendiculaire à $\triangle$ passant par I a pour équation $x + 2y - 3 = 0$.

e) Soit $L\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ et $K(3;0)$; le triangle LIK est rectangle.

3 GEIPI-Polytech 2008

0. Question préliminaire

On considère un triangle quelconque LMN du plan. On note H la projection orthogonale de L sur la droite (MN) et I le milieu du segment $[MN]$.

Démontrer que les aires des triangles LMI et LIN sont égales.

1. Soit ABC un triangle du plan. On considère les points A', B' et C' définis de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point P, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point Q et les droites (AA') et (CC') se coupent en un point R.

Construire les points A', B', C' et les points P, Q, R sur la figure donnée.

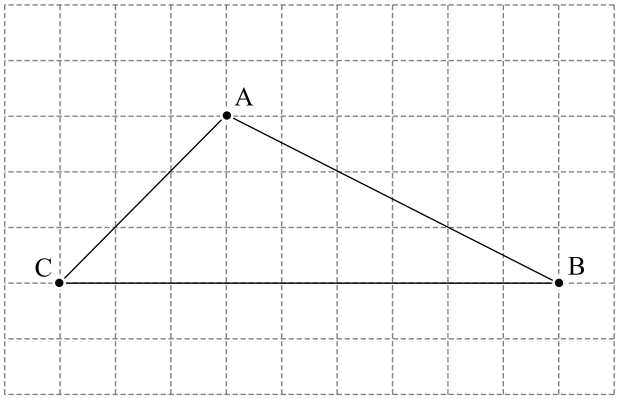

Figure 8.2

2. Déterminer les réels a, b et c tels que :

- le point C' soit le barycentre du système $\{(A;a);(B;1)\}$;
- le point A' soit le barycentre du système $\{(B;b);(C;1)\}$;
- le point B' soit le barycentre du système $\{(A;1);(C;c)\}$.

3. On considère les barycentres G_1, G_2 et G_3 des systèmes suivants :
$G_1 = \text{bar}\{(A;2);(B;1);(C;4)\}$; $G_2 = \text{bar}\{(A;4);(B;2);(C;1)\}$;
$G_3 = \text{bar}\{(A;1);(B;4);(C;2)\}$.

a) Expliquer pourquoi G_1 appartient aux droites (CC') et (BB').

b) En déduire quel est le point G_1.

c) De même, identifier les points G_2 et G_3.

4. À l'aide de la question **3. b**, déterminer les réels x, y, x' et y' tels que :

$$\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CQ} = x'\,\overrightarrow{CA} + y'\,\overrightarrow{CB}.$$

En déduire la position de Q sur le segment [CR]. Justifier toutes les réponses.

5. a) On admet alors que le point P est le milieu du segment $[BQ]$ et que le point R est le milieu du segment $[AP]$.

À l'aide des questions **0.** et **4.**, justifier chaque égalité d'aires suivante :

$$\begin{aligned}
\text{aire}(PQR) &= \text{aire}(PQC) \quad ; \quad \text{aire}(PQC) = \text{aire}(CBP)\\
\text{aire}(PQR) &= \text{aire}(BRP) \quad ; \quad \text{aire}(BRP) = \text{aire}(BRA)\\
\text{aire}(PQR) &= \text{aire}(AQR) \quad ; \quad \text{aire}(AQR) = \text{aire}(AQC)
\end{aligned}$$

b) Déterminer alors le rapport : $k = \dfrac{\text{aire}(PQR)}{\text{aire}(ABC)}$.

4 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère dans le plan deux points distincts A et B. Soit C le symétrique du point A par rapport à B, et D le symétrique du point B par rapport à A.

a) Le point C est le barycentre du système pondéré $\{(A,1);(B,2)\}$.

b) Le point D est le barycentre du système pondéré $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$.

c) Si I est le milieu du segment $[AB]$, le point D est le barycentre du système pondéré $\{(I,2);(C,-1)\}$.

d) Le point I est le barycentre du système pondéré $\{(C,2);(D,2)\}$.

5 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées :

$$A(2;4),\ B(-2;1) \text{ et } C(4;3).$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.

A : $d = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$; **B** : $d = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$; **C** : $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D : $d = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$; **E** : $d = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

6 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Dans un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, soit $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x + 2y = 1$.

a) La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ au point A a pour équation cartésienne : $2x + y = 3$.

b) Le cercle de centre A et de rayon 2 a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 4.$$

c) La médiatrice du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne : $-2x + y = \dfrac{3}{2}$.

d) Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 3y = -1$.

7 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère dans le plan un triangle ABC (les points A, B et C sont non alignés).
Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A; 1), (B; 1), (C; 1)\}$,
R le barycentre du système pondéré $\{(A; 1), (B; 1)\}$
et S le barycentre du système pondéré $\{(G; 1), (B; 1), (C; 1)\}$.

a) Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(R; 1), (C; 1)\}$.

b) Les points A, G et S sont alignés.

c) S est le centre de gravité du triangle GBC.

d) $\overrightarrow{AS} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

1 **1.** Soit $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$ deux points distincts de la parabole (P), avec $a<b$.
La droite (AB) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(b-a;b^2-a^2)$, ou encore le vecteur $\vec{u}(1;b+a)$ qui lui est colinéaire.
Le vecteur $\vec{v}(a+b;-1)$ est donc un vecteur normal, et la droite (AB) admet une équation cartésienne de la forme :

$$(a+b)\,x-y+k=0.$$

En écrivant que cette droite passe par A, on obtient :

$$(a+b)\,a-a^2+k=0 \quad \text{soit} \quad k=-ab,$$

puis une équation de (AB) :

$$(a+b)\,x-y-ab=0.$$

Dans un repère orthonormé, la distance de $M(x;x^2)$ à la droite (AB) est alors :

$$d(x)=\frac{|(a+b)\,x-x^2-ab|}{\sqrt{1+(a+b)^2}}\cdot$$

2. Le côté AB étant fixe, maximiser l'aire du triangle MAB revient à maximiser la hauteur associée, c'est-à-dire la distance $d(x)$.
Le dénominateur de $d(x)$ étant fixe, maximiser $d(x)$ revient à maximiser $|P(x)|$ avec :

$$P(x)=-x^2+(a+b)\,x-ab=-(x-a)(x-b).$$

Comme $a<x<b$, ce polynôme est positif et il reste à maximiser $P(x)$ sur $[a,b]$;
Avec $P'(x)=-2x+a+b$, on obtient le tableau de variation :

x	a		$\dfrac{a+b}{2}$		b
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Il existe donc un point M_0 qui rend maximale l'aire du triangle M_0AB.
Son abscisse est $x_0=\dfrac{a+b}{2}\cdot$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

2

a.	b.	c.	d.	e.
F	F	F	V	V

- Vous pouvez répondre très vite aux questions **a) b) e)** avec un dessin :

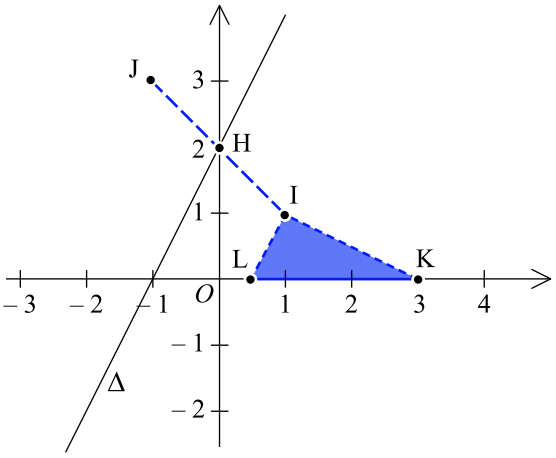

Figure 8.3

a) Le point $H(0;2)$ vérifie l'équation $2x - y + 2 = 0$. Il appartient donc à la droite $\triangle$.
Le vecteur $\vec{u}(2;-1)$ est orthogonal à $\triangle$.
Mais le vecteur $\overrightarrow{HI}(1;-1)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.
La droite (HI) n'est donc pas perpendiculaire à $\triangle$, et H n'est pas le projeté orthogonal de I sur $\triangle$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{IJ}(-2;2)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.
Le point J ne peut donc pas être le symétrique de I par rapport à $\triangle$.

En temps libre, vous pouvez remarquer que $\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{HI}$.
Le point J est donc le symétrique du point I par rapport au point H, et non par rapport à la droite $\triangle$.

c) Le repère étant orthonormé, la distance de I à $\triangle$ est :

$$\frac{|2 \times 1 - 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

L'affirmation est donc fausse.

d) Toute perpendiculaire à $\triangle$ a pour vecteur normal $\vec{v}(1;2)$ qui est orthogonal à $\vec{u}$. Elle admet donc une équation de la forme :

$$x + 2y + k = 0.$$

En considérant celle qui passe par I, on a $k = -3$, ce qui montre que l'affirmation de l'énoncé est vraie.

e) On peut calculer les composantes des vecteurs :

$$\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2};-1\right) \ ; \ \overrightarrow{IK}(2;-1)$$

puis le produit scalaire :

$$\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK} = 0.$$

Le triangle LIK est donc rectangle en I.

3

0. Question préliminaire

La formule de calcul de l'aire d'un triangle avec une base et la hauteur associée, donne :

$$\text{aire}(LMI) = \frac{MI \times LH}{2} \ ; \ \text{aire}(LIN) = \frac{IN \times LH}{2}.$$

I étant le milieu de $[MN]$, on a $MI = IN$, ce qui entraîne l'égalité des aires.

1. En s'aidant des quadrillages fournis, on obtient :

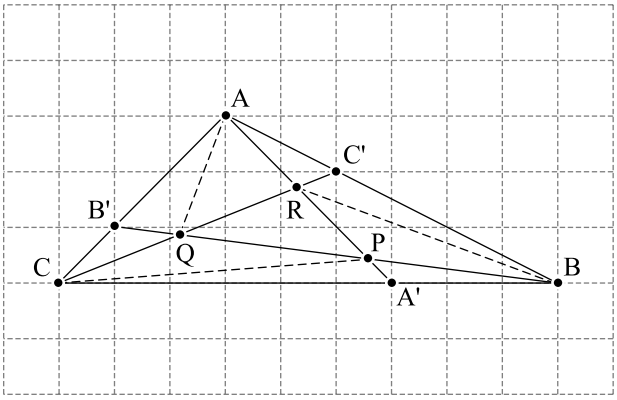

Figure 8.4

2. Comme $\overrightarrow{C'B} = 2\overrightarrow{AC'}$ soit $\overrightarrow{C'B} + 2\overrightarrow{C'A} = \vec{0}$, le point C' est le barycentre du système $\{(A,2);(B,1)\}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Comme $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$ soit $\overrightarrow{A'C}+2\overrightarrow{A'B} = \vec{0}$, le point A' est le barycentre du système $\{(B,2);(C,1)\}$.

Comme $\overrightarrow{B'A} = 2\overrightarrow{CB'}$ soit $\overrightarrow{B'A}+2\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$, le point B' est le barycentre du système $\{(A,1);(C,2)\}$.

3. a) D'après la propriété d'associativité du barycentre, on a :

$$G_1 = \text{bar}\{(A;2);(B;1);(C;4)\} = \text{bar}\{(C';3);(C;4)\}$$

donc $G_1 \in (CC')$.

D'autre part :

$$G_1 = \text{bar}\{(A;2);(B;1);(C;4)\} = \text{bar}\{(B;1);(B';6)\}$$

donc $G_1 \in (BB')$.

b) Le point G_1 est donc le point Q.

c) On passe de G_1 à G_2, puis de G_2 à G_3, par la permutation circulaire :

$$A \to B \ \ ; \ \ B \to C \ \ ; \ \ C \to A.$$

Avec la même démonstration que dans la question précédente, on obtient donc que G_2 est le point R et que G_3 est le point P.

4. Comme $R = G_2 = \text{bar}\{(A;4);(B;2);(C;1)\}$,

on peut écrire : $7\overrightarrow{CR} = 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ d'où : $\overrightarrow{CR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$

c'est-à-dire : $x = \frac{4}{7}$ et $y = \frac{2}{7}$.

Comme $Q = G_1 = \text{bar}\{(A;2);(B;1);(C;4)\}$,

on peut écrire : $7\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ d'où : $\overrightarrow{CQ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CB}$

c'est-à-dire : $x' = \frac{2}{7}$ et $y' = \frac{1}{7}$.

On vient d'obtenir $\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CQ}$. Le point Q est donc le milieu de $[CR]$.

5. a) En utilisant la question préliminaire,

- comme Q est le milieu de $[CR]$, on a :

  aire (PQR) = aire (PQC) (dans le triangle PCR)

  aire (AQR) = aire (AQC) (dans le triangle ACR)

- comme P est le milieu de $[BQ]$, on a :

  aire (PQC) = aire (CBP) (dans le triangle CBQ)

  aire (PQR) = aire (BRP) (dans le triangle RBQ)

• comme R est le milieu de $[AP]$, on a :

$$\text{aire}(BRP) = \text{aire}(BRA) \qquad \text{(dans le triangle } BAP\text{)}$$

$$\text{aire}(PQR) = \text{aire}(AQR) \qquad \text{(dans le triangle } AQP\text{)}$$

On obtient ainsi toutes les égalités demandées.

b) Le triangle ABC se subdivise en 7 triangles :

$$PQR \ ; \ PQC \ ; \ CBP \ ; \ BRP \ ; \ BRA \ ; \ AQR \ ; \ AQC$$

qui ont tous la même aire d'après la question précédente. On a donc :

$$\frac{\text{aire}(PQR)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{1}{7}.$$

4

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	F	V	V

Faites un dessin :

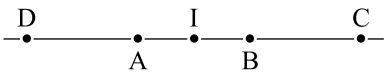

Figure 8.5

a) Un barycentre des points A et B avec des coefficients positifs appartient au segment $[AB]$. Ce n'est pas le cas du point C.

L'affirmation est fausse.

b) D'après les informations fournies (et avec l'aide du dessin), on a :

$$2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.$$

D est donc barycentre du système pondéré $\{(A,1);(C,1);(B,-2)\}$ ce qui ne correspond pas aux pondérations de l'énoncé.

L'affirmation est fausse.

c) On a (avec l'aide du dessin si nécessaire) : $2\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC}$.

Le point D est donc le barycentre du système pondéré $\{(I,2);(C,-1)\}$.

L'affirmation est vraie.

d) Le point I est le milieu de $[CD]$. Il est donc barycentre des points C et D affectés du même coefficient.

L'affirmation est vraie.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

5 **Réponse : D** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

La droite (BC) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}(6;2)$ et donc comme vecteur normal $\vec{v}(1;-3)$. Elle admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - 3y + k = 0.$$

En écrivant qu'elle passe par B, on obtient $k = 5$ et donc l'équation :

$$x - 3y + 5 = 0.$$

Le repère étant orthonormé, la distance de A à la droite (BC) est :

$$d = \frac{|2 - 3 \times 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

6

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	F	V	V

a) La droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x+2y-1=0$ admet le vecteur $\vec{n}(1;2)$ comme vecteur normal.

Donc toute droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ admet $\vec{v}(2;-1)$ comme vecteur normal et une équation cartésienne de la forme :

$$2x - y + k = 0.$$

L'affirmation est donc fausse.

b) On peut transformer l'écriture de l'équation cartésienne proposée :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 4.$$

On obtient ainsi :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6$$

qui est une équation du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{6}$.

L'affirmation est donc fausse.

c) Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ est un vecteur normal de la médiatrice cherchée. Elle admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$-2x + y + k = 0.$$

En écrivant qu'elle passe par le milieu de $[AB]$, soit $I\left(0;\frac{3}{2}\right)$, on obtient $k = -\frac{3}{2}$.

L'affirmation est donc exacte.

d) L'ensemble des points M du cercle de diamètre $[AB]$ est caractérisé par :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff (x-1)(x+1) + (y-1)(y-2) = 0.$$

En développant et en simplifiant, on obtient :

$$x^2 + y^2 - 3y + 1 = 0.$$

L'affirmation est donc exacte.

7

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	V	V	F

Vous pouvez répondre à toutes les question à l'aide d'un dessin. Il vous suffit de savoir que, quand les coefficients ont égaux,

- le barycentre de deux points est le milieu du segment, donc R est le milieu de $[AB]$;
- le barycentre de trois points non alignés est le centre de gravité du triangle ;

donc G est le centre de gravité de ABC et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$
et S est le centre de gravité de GBC.

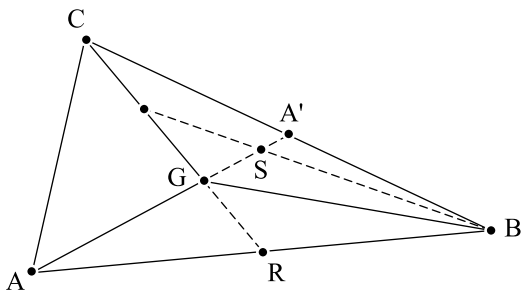

Figure 8.6

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

9 Géométrie dans l'espace

Thèmes du chapitre

Plan dans l'espace, équations cartésiennes, équations paramétriques. Orthogonalité de deux plans, distance d'un point à un plan, plan médiateur d'un segment.

Droite dans l'espace, équations cartésiennes, équations paramétriques.

Sphères.

Des savoir-faire à maîtriser

- Dans un repère orthonormé, la distance d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B. C'est aussi le plan perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par le milieu de $[AB]$.

- Pour montrer qu'une droite $\mathcal{D}$ est incluse dans un plan $\mathcal{P}$, il est conseillé de connaître $\mathcal{D}$ sous forme paramétrique et $\mathcal{P}$ sous forme cartésienne.

En reportant la forme paramétrique de $\mathcal{D}$ (paramètre t par exemple) dans la forme cartésienne de $\mathcal{P}$, vous obtenez une égalité qui doit être vérifiée pour tout t.

Des réflexes à avoir

- La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

- Un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

- Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux, écrivez deux vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, puis calculez $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$.

Enoncés

1 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

On considère dans l'espace rapporté au repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les deux plans suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 :&\quad 2x+y-3z+1=0\\ \mathcal{P}_2 :&\quad x-y+2=0\end{aligned}$$

Donner l'équation du plan passant par le point O et contenant la droite d'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

A : $x+y-2z=0$.

B : $x+y=0$.

C : $2x+y-3z=0$.

D : $x+y+z+3=0$.

E : $y-2z=0$.

2 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère le système :

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y-3z &= 1\\ -3x+y+2z &= -3\\ 2x-3y+z &= 2\end{cases}$$

On appelle $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z=1$ et $\mathcal{D}$ la droite définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} -3x+y+2z &= -3\\ 2x-3y+z &= 2\end{cases}$$

a) Le système (S) admet pour unique solution en $(x;y;z)$ le triplet $(2;1;1)$.

b) La droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

c) Le système $\begin{cases} x-y &= 1\\ y-z &= 0\end{cases}$ est un autre système qui permet de définir la droite $\mathcal{D}$.

d) Le vecteur $\vec{u}(2;1;1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère par leurs coordonnées les points :

$$A(1; -1+\sqrt{2}; 2) \quad ; \quad B(3; -1-\sqrt{2}; 4) \quad ; \quad C(2; -1; 3).$$

On appelle :

Σ l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ tels que :

$$(x-1)(x-3)+(y+1-\sqrt{2})(y+1+\sqrt{2})+(z-2)(z-4)=0.$$

$\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+z\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1$.

a) Σ est une sphère dont un diamètre est $[AB]$.

b) Σ est une sphère de centre C.

c) La distance de C à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{3(1+\sqrt{2})}{2}$.

d) $\mathcal{P}$ est tangent à Σ.

4 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(-1; 2; 4)$, $B(0; -2; 3)$, $C(7; 1; -1)$ et $D(-2; -2; -13)$.

On appelle $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[AB]$, c'est-à-dire le plan contenant les points équidistants de A et de B, ou aussi le plan perpendiculaire à $[AB]$ contenant le milieu de $[AB]$.

On appelle $\mathcal{Q}$ le plan médiateur de $[CD]$.

a) Le vecteur de coordonnées $(8; -1; -5)$ est normal à $\mathcal{Q}$.

b) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x+4y+z+4=0$.

c) A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre $\Omega(-1; 2; -5)$.

d) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

5 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les ensembles P, Q et R d'équations respectives :

$$P : x+y=0 \quad ; \quad Q : 2x-y-z-1=0 \quad ; \quad R : z=1.$$

a) P est une droite.

b) L'ensemble des points appartenant à la fois à P et à R est une droite.

c) P et Q sont perpendiculaires.

d) P, Q et R se coupent au point $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$.

6 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

On considère la représentation ci-dessous de l'espace rapporté à un repère orthonormal dont le centre est un point O.

On sait que la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

On appelle A le point de coordonnées $(2; -1; -2)$.

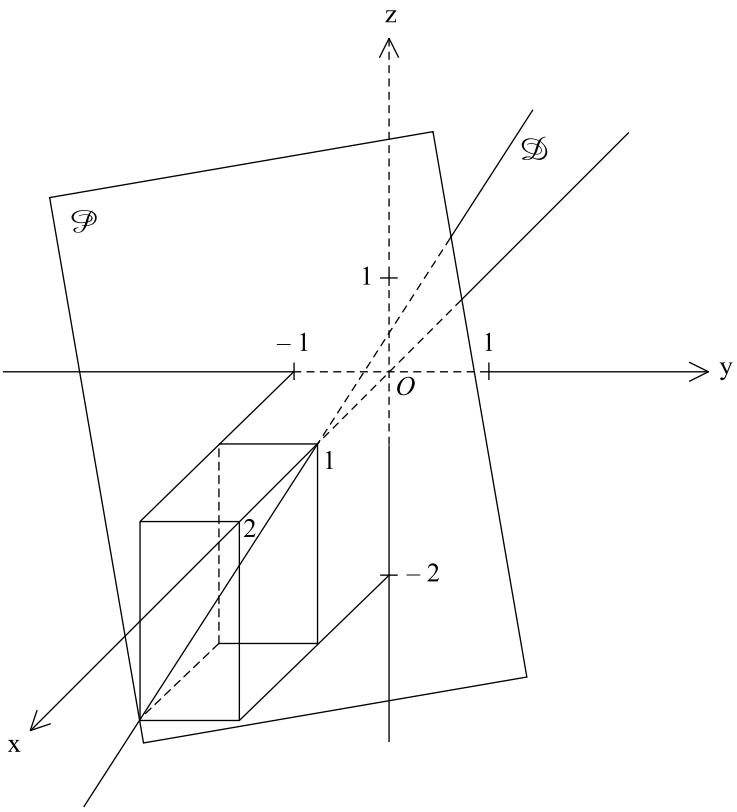

Figure 9.1

a) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x - y - 2z - 1 = 0$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) La droite $\mathcal{D}$ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -2t \\ y &= 1+2t \\ z &= 2+4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

c) La demi-droite $[OA)$ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= -1-t \\ z &= -2-2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

d) La sphère de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$ est cachée par $\mathcal{P}$.

7 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les plans d'équations respectives :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y - x = \sin^2\theta \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad ; \quad \mathcal{Q} : \begin{cases} z - y = \cos^2\theta \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On appelle Δ la droite d'intersection de ces deux plans.

a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont orthogonaux.

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est contenue dans le plan d'équation :

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est orthogonale au plan d'équation :

$$x + y + z = 0.$$

d) Il existe un réel θ tel que Δ soit parallèle au plan $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

8 GEIPI-ENI 2007

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les trois points non alignés A, B, C suivants, donnés par leurs coordonnées :

$$A(1;0;-1) \ ; \ B(3;-1;2) \ ; C(2;-2;-1)$$

et le point E de coordonnées : $E(4;-1;-2)$.

1. a) Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.

c) Calculer la distance $d(E;\mathcal{P})$ du point E au plan $\mathcal{P}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE).

3. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Donner un point J et un vecteur directeur $\vec{w}$ de $\mathcal{D}$.

b) Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

4. a) Déterminer le point M de $\mathcal{D}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\vec{v}(0;1;1)$ soient orthogonaux.

b) En déduire la distance $d(E;\mathcal{D})$ du point E à la droite $\mathcal{D}$.

9 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$2x + y + z = 13$$

Le point A a pour coordonnées $(1;0;1)$ et le point B a pour coordonnées $(2;1;3)$.
La droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$ admettent pour intersection :

A : le point $I(0;8;5)$; **B** : le point $I(3;2;5)$; **C** : le point $I(1;1;2)$

D : l'ensemble vide ; **E** : la droite (AB)

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1

Réponse : A (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Éliminez immédiatement la réponse **D** qui correspond à un plan qui ne passe pas par O. Pour déterminer le bon choix parmi les autres réponsses, écrivons une équation paramétrique de la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$:

$$\begin{cases} 2x + y = 3t - 1 \\ x - y = -2 \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

En reportant ces expressions dans les premiers membres des équations proposées, seule l'égalité de l'affirmation **A** est vérifiée pour tout réel t.

2

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	V	V	F

a) La somme membre à membre des trois équations donne $0 = 0$. On obtient donc un système équivalent à (S) en supprimant une équation.
Par conséquent, il y a une infinité de solutions.

b) Écrivons $\mathcal{D}$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} -3x + y = -3 - 2t \\ 2x - 3y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(1;1;1)$ et passe par le point $A(1;0;0)$.

En reportant la forme paramétrique de $\mathcal{D}$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on obtient :

$$t + 1 + 2t - 3t = 1.$$

Cette égalité étant toujours vérifiée, $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

c) La forme paramétrique de $\mathcal{D}$ vérifie le nouveau système. L'affirmation est donc vraie.

d) On a déjà vu que $\vec{v}(1;1;1)$ était un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Comme $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}$, l'affirmation est fausse.

3

a.	b.	c.	d.
V	V	F	V

a) Quand un diamètre $[AB]$ est donné, l'équation d'une sphère dans l'espace (ou d'un cercle dans le plan) s'obtient par la caractérisation :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

C'est exactement le résultat de ce calcul qui est donné comme équation de Σ.
Σ est donc la sphère de diamètre $[AB]$.

b) Le point C est le milieu de $[AB]$. C'est donc le centre de la sphère Σ.

c) Le repère étant orthonormal, la distance du point $C(2;-1;3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + \sqrt{2}z - 3\sqrt{2} + 1 = 0$ est égale à :

$$\frac{|2-(-1)+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}} = 2$$

L'affirmation est donc fausse.

d) Le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère Σ si la distance du centre C à $\mathcal{P}$ (soit 2) et égale au rayon de la sphère, qui est :

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-2\sqrt{2})^2+2^2} = 2.$$

L'affirmation est donc exacte.

4

a.	b.	c.	d.
F	F	V	V

a) On connaît déjà un vecteur normal à $\mathcal{Q}$: $\overrightarrow{CD} = (-9;-3;-12) = -3(3;1;4)$.
Le vecteur $(8;-1;-5)$ n'est pas colinéaire à ce vecteur. L'affimation de l'énoncé est donc fausse.

b) On connaît déjà un vecteur normal à $\mathcal{P}$: $\overrightarrow{AB} = (1;-4;-1)$.
Le plan d'équation $x + 4y + z + 4 = 0$ admet comme vecteur normal $\vec{n}(1;4;1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires. L'affimation de l'énoncé est donc fausse.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) Il suffit de calculer les longueurs :

$\Omega A = \sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2+(4+5)^2} = 9$

$\Omega B = \sqrt{(0-1)^2+(-2-2)^2+(3+5)^2} = 9$

$\Omega C = \sqrt{(7+1)^2+(1-2)^2+(-1+5)^2} = 9$

$\Omega D = \sqrt{(-2+1)^2+(-2-2)^2+(-13+5)^2} = 9$

Les points A, B, C et D appartiennent donc à la sphère de centre Ω et de rayon 9.

d) La condition $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ caractérise la sphère de diamètre $[AB]$.

5

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	V	F	V

a) Dans l'espace, l'équation $x + y = 0$ définit un plan.
C'est dans le plan xOy qu'on aurait eu une droite.

b) P et R sont deux plans non parallèles. Leur intersection est une droite.

Pour faciliter la question **d)**, on peut préciser :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

$P \cap R$ est donc la droite qui passe par $(0;0;1)$ et qui admet comme vecteur directeur $\vec{u}(1;-1;0)$.

c) P admet comme vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1;1;0)$.
Q admet comme vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(2;-1;-1)$.
On a $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1 \neq 0$. Les plans P et Q ne sont donc pas perpendiculaires.

d) Les points de $P \cap R$ sont de la forme $(t;-t;1)$ avec $t \in \mathbb{R}$.
S'ils appartiennent en plus à Q, on a

$$2t + t - 1 - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad t = \frac{2}{3}$$

ce qui donne le point $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};1\right)$.

6

a.	b.	c.	d.
V	V	F	F

Repérez quelques points avec leurs coordonnées. La lecture graphique d'une représentation de l'espace fait partie des objectifs de cet exercice.

a) La droite $\mathcal{D}$ passe par $A(2;-1;-2)$ et par $B(1;0;0)$. Elle admet donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(1;-1;-2)$.
Le plan $\mathcal{P}$ étant orthogonal à $\mathcal{D}$ admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$x - y - 2z + k = 0.$$

Il reste à observer que le point B appartient à $\mathcal{P}$ pour obtenir $k = -1$.

b) L'équation paramétrique proposée est celle d'une droite. Elle est vérifiée par le point A (avec $t = -1$) et par le point B (avec $t = 0$).
Il s'agit donc de la droite passant par les points A et B, c'est-à-dire de la droite $\mathcal{D}$.

c) L'affirmation est fausse puisqu'avec $t \in \mathbb{R}$, on obtient une droite, et pas une demi-droite.

L'équation paramétrique fournie représente la droite (OA).

d) La distance du point O au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

$$d = \frac{|1 \times 0 - 1 \times 0 - 2 \times 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Comme cette distance est inférieure au rayon $\frac{1}{2}$ de la sphère, la sphère et le plan sont sécants.

7

a.	b.	c.	d.
F	V	V	F

a) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ admettent pour vecteurs normaux respectifs

$$\overrightarrow{n_1}(1;1;0) \text{ et } \overrightarrow{n_2}(0;1,1)$$

Comme $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1 \neq 0$, les plans ne sont pas orthogonaux.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Tout point $M(x, y, z)$ de la droite $\triangle$ vérifie :

$$\begin{cases} y - x = \sin^2\theta \\ z - y = \cos^2\theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -x + z = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Il appartient donc au plan :

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, la droite $\triangle$ peut s'écrire sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - \sin^2\theta \\ y = t \\ z = t + \cos^2\theta \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Elle admet $\vec{u}(1; 1; 1)$ comme vecteur directeur. Elle est donc orthogonale au plan d'équation :

$$x + y + z = 0.$$

d) Le plan $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ a pour équation $z = 0$.
Le vecteur directeur $\vec{u}$ n'appartient donc pas à ce plan, et il est impossible que $\triangle$ soit parallèle au plan.

8 **1. a)** Les vecteurs $\overrightarrow{CE}(2; 1; -1)$, $\overrightarrow{AB}(2; -1; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(1; -2; 0)$ vérifient :

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 1 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 = 0.$$

La droite (CE) est donc orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

b) Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un plan $\mathcal{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ étant orthogonal à deux droites non parallèles de ce plan est un vecteur normal.
Le plan $\mathcal{P}$ admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + y - z + k = 0.$$

En écrivant que A appartient à $\mathcal{P}$, on obtient $k = -3$, soit l'équation :

$$2x + y - z - 3 = 0.$$

c) Le repère étant orthonormé, la distance demandée se calcule :

$$d(E, \mathcal{P}) = \frac{|8 - 1 + 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

2. Pour la droite (AE), on connaît le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AE}(3;-1;-1)$. On obtient ainsi un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= -t \\ z &= -t-1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. a) La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $J(0;2;-1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{w}(0;1;1)$.

b) La droite $\mathcal{D}$ étant connue sous forme paramétrique et le plan $\mathcal{P}$ sous forme cartésienne, il suffit de reporter les coordonnées d'un point quelconque de $\mathcal{D}$ dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$2+t+1-t-3=0.$$

Comme l'égalité a lieu quel que soit t, la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

4. a) Comme $\overrightarrow{EM}(-4;3+t;1+t)$, on a :

$$\overrightarrow{EM}\cdot\vec{v} = 3+t+1+t = 2t+4.$$

Pour que $\overrightarrow{EM}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux, il faut choisir $t=-2$, ce qui donne le point $M(0;0;-3)$.

b) Le point M obtenu dans la question précédente est le projeté orthogonal de E sur la droite $\mathcal{D}$. On a donc :

$$d(E,\mathcal{D}) = EM = \|(-4;1;-1)\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

9 **Réponse : B** (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Le plan $\mathcal{P}$ est donné sous forme cartésienne. Écrivons une représentation paramétrique de la droite (AB).

La droite (AB) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(1;1;2)$ et elle passe par A. On peut donc la représenter sous forme paramétrique par :

$$\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t \\ z &= 2t+1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

En reportant dans l'équation de $\mathcal{P}$, on obtient :

$$2t+2+t+2t+1=13 \iff t=2$$

ce qui conduit au point $I(3;2;5)$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10 Dénombrement et probabilités

Thèmes du chapitre

Dénombrement de listes, dénombrement de parties.
Langage des événements, probabilité uniforme.
Probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, indépendance.

Des savoir-faire à maîtriser

- Si $P(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre (deux notations possibles) :

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Système complet d'événements

C'est une liste d'événements, deux à deux incompatibles, et qui couvre tous les cas. Vérifiez que la somme de leurs probabilités est toujours égale à 1.

- Théorème des probabilités totales

Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements. Pour tout B, on a :

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + \cdots + P(A_n) \times P(B/A_n).$$

Des réflexes à avoir

- Quand une situation comporte plusieurs choix à réaliser,
  - on effectue un produit quand on doit faire un choix, *puis* un autre...
  - on effectue une somme quand on a à considérer un cas *ou bien* un autre...

- Pour répondre à un QCM, il peut être intéressant d'assimiler probabilités et fréquences, et de construire un tableau d'effectifs. Considérer une probabilité conditionnelle, c'est alors se restreindre à une ligne (ou une colonne) du tableau.
- Si vous devez faire des choix successifs, dans un ordre imposé, il peut être efficace de dessiner un arbre.

Enoncés

1 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Une école d'ingénieurs sélectionne ses étudiants avec une épreuve sous la forme de QCM portant sur 15 questions. Pour chaque question, il y a quatre réponses possibles dont une seule est vraie.

a) Le nombre de façons de répondre au QCM est 4^{15}.

b) Le nombre de possibilités de répondre correctement à exactement dix questions est $\binom{15}{10} 3^5$.

c) Le nombre de possibilités de répondre correctement à toutes les questions est 15.

d) Le nombre de possibilités de répondre correctement à au moins une question est $4^{15} - 15$.

2 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Dans une population adulte d'une ville, il y a 55 % d'inactifs ; 80 % des actifs sortent le dimanche et 20 % le samedi ; 90 % des inactifs sortent le samedi et 20 % le dimanche.

a) 47 % des adultes de cette ville sortent le dimanche.

b) 48,5 % des adultes de cette ville sortent le samedi.

Un habitant est choisi au hasard. On constate qu'il sort le samedi.

c) La probabilité pour qu'il soit inactif est d'environ 0,85.

d) La probabilité pour qu'il soit actif est d'environ 0,80.

3 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille et que, lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants.

Pour une famille de deux enfants :

a) La probabilité pour que les enfants soient deux garçons est $\frac{1}{2}$.

b) La probabilité pour qu'il y ait au moins une fille est $\frac{3}{4}$.

c) La probabilité pour que les enfants soient de même sexe est $\frac{1}{2}$.

d) La probabilité pour que les enfants soient de sexes différents est $\frac{1}{2}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4 EPF 2008

Un couple a eu trois enfants. On sait que, s'ils n'ont eu que des filles, la dernière s'appelle Dominique et que, sinon, le premier garçon s'appelle Dominique. Les trois enfants ont des prénoms différents.

On note G_1 l'événement « le premier enfant est un garçon », F_1 l'événement « le premier enfant est une fille » et, de même, on définit les événements G_2, F_2, G_3 et F_3.

On note également D_1 l'événement « le premier enfant s'appelle Dominique » et, de même, on définit D_2 et D_3.

On suppose que les événements G_1, G_2 et G_3 sont indépendants et ont pour probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Parmi les événements définis ci-dessus, citer deux événements contraires, puis deux événements incompatibles mais non contraires.

2. Calculer les probabilités $P(D_1)$, $P(D_2)$ et $P(D_3)$.

3. Quelle est la probabilité que Dominique soit un garçon ?

4. On rencontre l'un des enfants au hasard. C'est un garçon.

Quelle est la probabilité qu'il s'appelle Dominique ?

5 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants.

Il a une chance sur trois de réussir le concours C_1 et une chance sur trois de réussir le concours C_2.

Pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours.

Quelle probabilité p a-t-il de réussir au moins un concours ?

A : $p = \frac{2}{3}$ **B** : $p = \frac{5}{9}$ **C** : $p = \frac{2}{9}$ **D** : $p = \frac{4}{9}$ **E** : $p = \frac{1}{9}$

6 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit b et n deux entiers naturels tels que $b > 2$ et $n \geqslant 2$.

Une urne contient 2 boules blanches et $(b-2)$ boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on repère sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète ainsi n fois cette expérience.

On désigne par p_n la probabilité de tirer une boule blanche et une seule lors des $(n-1)$ premiers tirages et une boule noire au n-ième tirage.

a) $p_2 = 1 - \dfrac{2}{b^2}$.

b) $p_n = \dfrac{2(n-1)}{b}\left(1 - \dfrac{2}{b}\right)^{n-1}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(p_n) = +\infty$.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{n-1} = 1$.

7 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de façon indépendante un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On obtient ainsi une partie complète en trois manches, chaque lancer constituant une manche.

Le joueur gagne la partie s'il obtient « 1 ou 2 » à chaque lancer. Il perd dans les autres cas.

La partie coûte 1 € ; le joueur reçoit 27 € s'il gagne la partie.

a) La probabilité de gagner une partie est $\dfrac{1}{27}$.

b) Ce jeu est équitable.

c) La probabilité pour un joueur de gagner au moins une fois en trois parties est $\dfrac{1}{9}$.

d) La probabilité qu'un joueur gagne une partie sachant qu'il a gagné la première manche est la même que la probabilité qu'il gagne la première manche sachant qu'il a gagné la partie.

8 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules blanches et n boules noires. On jette un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

- Si le résultat est pair, on prélève au hasard, successivement avec remise intermédiaire, deux boules de U_1.
- Si le résultat est impair on prélève au hasard, successivement sans remise intermédiaire, deux boules de U_2.

On appelle N l'événement « obtenir deux boules noires ». On désigne par :

– $p(N)$ la probabilité de l'événement N,

– $p_{U_1}(N)$ la probabilité de l'événement N sachant que les deux boules tirées proviennent de U_1,

– $p_{U_2}(N)$ la probabilité de l'événement N sachant que les deux boules tirées proviennent de U_2.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) La probabilité d'obtenir deux boules noires de U_1 est $\frac{1}{8}$.

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $p_{U_1}(N) = p_{U_2}(N)$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{U_1}(N) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_{U_2}(N)$.

d) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $p(N) = \frac{4n-3}{8(2n-1)}$.

9 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

On considère un espace probabilisé fini (Ω, p) dans lequel un événement A a les trois possibilités A_1, A_2, et A_3 deux à deux distinctes de se produire et un événement B a les deux possibilités B_1 et B_2 distinctes de se produire.

Le tableau suivant donne en pourcentages la probabilité de certains événements de se produire par rapport à l'univers Ω.

	A_1	A_2	A_3	Total/B
B_1		20		
B_2	30			
Total/A			10	100

On donne aussi les renseignements suivants :

$p(A_2) = 60\,\%$ et $p_{B_1}(A_3) = \frac{1}{6}$ (l'écriture $p_{B_1}(A_3)$ représentant la probabilité d'obtenir A_3 sachant que B_1 est réalisé).

a) A_1 et B_1 sont incompatibles.

b) La probabilité d'obtenir B_1 est 24 %.

c) Si A_3 est réalisé, la probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.

d) La probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.

10 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

Un sondage auprès des Terminales du lycée Chanson donne les résultats suivants :

- 65 % de ces Terminales regardent la Star Academy ;
- Parmi les Terminales regardant la Star Academy, 40 % sont en Terminale S ;
- Parmi les Terminales ne regardant pas la Star Academy, 20 % sont en Terminale S.

On interroge au hasard un élève de Terminale du lycée Chanson.
On note : SA l'événement « l'élève interrogé regarde la Star Academy »,
TS l'événement « l'élève interrogé est en Terminale S ».

Alors :

a) $P(SA \cap TS) = \frac{2}{5}$.

b) $P(\overline{TS}/\overline{SA}) = \frac{4}{5}$.

c) $P(\overline{TS}/SA) = \frac{3}{5}$.

d) $P(TS \cap \overline{SA}) = \frac{3}{5}$.

e) $P(TS) = \frac{33}{100}$.

11 GEIPI-ENI 2007

Pour descendre du sommet S d'une montagne, des skieurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. Ils doivent impérativement passer par l'un des deux restaurants se trouvant tous les deux à 2 200 mètres d'altitude. Les deux restaurants ne sont pas situés sur le même versant de la montagne. On les nomme R_1 et R_2.

Après la pause, pour atteindre le village V qui se trouve à 1 100 mètres d'altitude, les skieurs ont deux possibilités : ils peuvent descendre directement au village ou faire halte au restaurant R_3 qui se trouve à 1 800 mètres d'altitude, pour prendre le café.

La probabilité que les skieurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\frac{1}{3}$.
En partant de R_1 la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\frac{3}{4}$.
En partant de R_2 la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\frac{2}{3}$.

1. Compléter l'arbre représentant tous les trajets possibles du sommet S au village V.

2. a) Déterminer la probabilité p_1 que les skieurs prennent un café au restaurant R_3, sachant qu'ils ont déjeuné ensemble au restaurant R_1.

b) Déterminer la probabilité p_2 que les skieurs prennent un café au restaurant R_3.

c) Déterminer la probabilité p_3 que les skieurs aient déjeuné au restaurant R_1, sachant qu'ils ont pris un café au restaurant R_3.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3. Les distances en kilomètres entre les différents points sont :

$SR_1 = 5\,;SR_2 = 4\,;R_2R_3 = 4{,}5\,;R_1R_3 = 4\,;R_3V = 2\,;R_1V = 5{,}5\,;R_2V = 6$

(*cf.* figure ci-dessous).

Soit D la variable aléatoire représentant la distance parcourue par les skieurs pour aller du sommet S au village V.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire D.

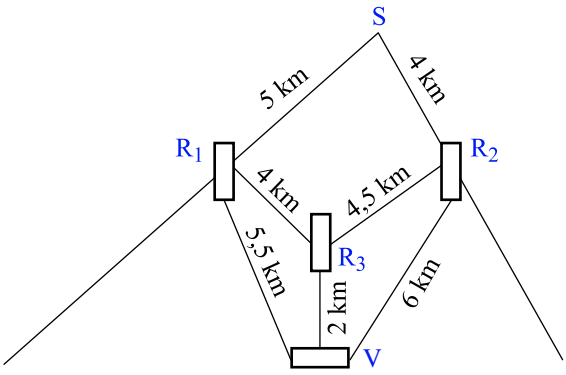

Figure 10.1

12 EPF 2007

Sur une planète lointaine vivent des individus verts et des individus bleus.

85 % des individus bleus sont musiciens et 90 % des individus musiciens sont bleus.

On choisit un individu au hasard et on note x la probabilité que cet individu soit bleu. On suppose $0 < x < 1$.

1. Les événements « l'individu est bleu » et « l'individu est musicien » sont-ils indépendants ?

2. Comparer la probabilité que l'individu soit musicien sachant qu'il est bleu et la probabilité que l'individu soit musicien sachant qu'il est vert.

3. Y a-t-il la même proportion de musiciens parmi les invidus verts et les individus bleus ?

13 GEIPI-ENI 2006

Une seule réponse vraie

Une urne contient six boules dont cinq boules rouges et une boule noire. On effectue au hasard des tirages successifs et sans remise d'une boule et on s'arrête dès qu'on a tiré la boule noire.

Quelle est la probabilité p d'avoir à effectuer six tirages avant de s'arrêter ?

A : $p = 1$; **B** : $p = \frac{5}{6}$; **C** : $p = \frac{1}{36}$; **D** : $p = \frac{1}{6^6}$; **E** : $p = \frac{1}{6}$

14 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Un détaillant vend des ampoules en provenance de deux usines dans les proportions suivantes : 60 % des ampoules proviennent de l'usine Alpha ; 40 % des ampoules proviennent de l'usine Béta.

7 % des ampoules de l'usine Alpha et 4 % de l'usine Béta sont défectueuses.

Un client achète une ampoule chez ce détaillant.

a) La probabilité pour que l'ampoule provienne de l'usine Alpha et soit défectueuse est 0,042.

b) La probabilité pour que l'ampoule provienne de l'usine Béta et ne soit pas défectueuse est 0,384.

c) La probabilité pour que l'ampoule soit défectueuse est 0,058.

d) Sachant que l'ampoule achetée est défectueuse, la probabilité pour qu'elle provienne de l'usine Alpha est d'environ 0,7.

1

a.	b.	c.	d.
V	V	F	F

a) Pour la première question, il y a 4 possibilités, puis pour la deuxième question, il y a 4 possibilités …

Pour l'ensemble des questions, il y a donc $4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^{15}$ façons de répondre.

L'affirmation est vraie.

b) Pour déterminer le nombre de possibilités concernées, il faut :

- choisir les 10 questions parmi 15, ce qui est possible de $\binom{15}{10}$ façons ;
- pour ces questions, il n'y a qu'une seule façon de répondre de façon exacte ;
- pour chacune des 5 autres questions, il y a 3 façons de donner une réponse fausse, ce qui représente 3^5 possibilités ;

Le nombre cherché est donc $\binom{15}{10} 3^5$.

L'affirmation est vraie.

c) Il n'y a qu'une seule façon de répondre correctement à toutes les questions.

L'affirmation est fausse.

d) Il est préférable de penser à l'événement contraire « répondre faux à toutes les questions ».

Il y a en tout 4^{15} possibilités dont 3^{15} correspondent à cet événement contraire.

Il y a donc $4^{15} - 3^{15}$ façons de répondre correctement à au moins une question.

L'affirmation est fausse.

2

a.	b.	c.	d.
V	F	V	F

Vous ne pouvez pas vous aider avec un tableau d'effectifs car les événements « sortir le samedi » et « sortir le dimanche » ne sont pas incompatibles.

Mais un arbre est très intéressant en notant A (actif), I (inactif), D (sortir le dimanche), S (sortir le samedi).

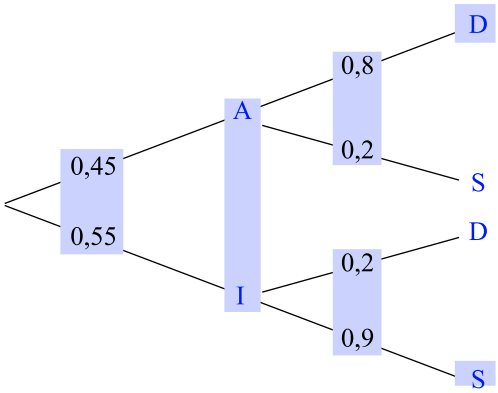

Figure 10.2

a) Deux parcours de l'arbre aboutissent à D. La somme de leurs probabilités est :

$$0{,}45 \times 0{,}8 + 0{,}55 \times 0{,}2 = 0{,}47.$$

L'affirmation est vraie.

b) Deux parcours de l'arbre aboutissent à S. La somme de leurs probabilités est :

$$0{,}45 \times 0{,}2 + 0{,}55 \times 0{,}9 = 0{,}585.$$

L'affirmation est fausse.

c) On demande :

$$P(I/S) = \frac{0{,}55 \times 0{,}9}{0{,}585} \approx 0{,}85.$$

L'affirmation est vraie.

d) On demande :

$$P(A/S) = \frac{0{,}45 \times 0{,}2}{0{,}585} \approx 0{,}15.$$

L'affirmation est fausse.

On a toujours $P(B/A) + P(\overline{B}/A) = 1$, ce qui permettait de déduire ce résultat de la question précédente sans nouveau calcul.

3

a.	b.	c.	d.
F	V	V	V

Vous pouvez répondre très vite avec un arbre :

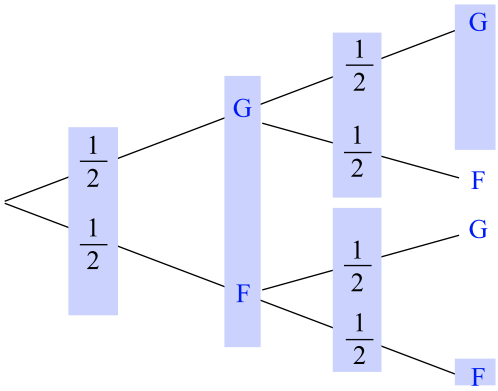

Figure 10.3

a) $P\{GG\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ · L'affirmation est fausse.

b) C'est l'événement contraire de la question précédente. La probabilité demandée est : $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ · L'affirmation est vraie.

c) $P\{GG, FF\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ · L'affirmation est vraie.

d) C'est l'événement contraire de la question précédente. La probabilité demandée est : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ · L'affirmation est vraie.

4 **1.** Les événements F_1 et G_1 sont des événements contraires.
Les événements D_1 et D_2 sont incompatibles car tous les prénoms sont différents. Mais le contraire de D_1 est $D_2 \cup D_3$ et non pas D_2.

2. $P(D_1) = P(G_1) = \frac{1}{2}$

$P(D_2) = P(F_1 \cap G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(D_3) = P(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Comme $\{D_1, D_2, D_3\}$ forme un système complet d'événements, vérifiez que :

$$P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) = 1.$$

3. L'événement contraire de « Dominique est un garçon » est « les trois enfants sont des filles ». La probabilité demandée est donc :

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}\cdot$$

4. On demande la probabilité conditionnelle :

$$P(D/G) = \frac{P(D \cap G)}{P(G)} = \frac{P(D) \times P(G/D)}{P(G)}\cdot$$

On a :

$P(G) = \frac{1}{2}$ (équiprobabilité des sexes)

$P(D) = \frac{1}{3}$ (un enfant sur trois s'appelle Dominique)

$P(G/D) = \frac{7}{8}$ (question précédente)

La probabilité demandée est donc :

$$P(D/G) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{12}\cdot$$

5

Réponse : B (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Il est plus rapide de penser à l'événement contraire, c'est-à-dire « rater les deux concours ».

Les concours étant indépendants, sa probabilité est : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\cdot$

La probabilité de réussir au moins un concours est donc : $p = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}\cdot$

6

a.	b.	c.	d.
F	V	F	F

a) La probabilité p_2 est celle de l'événement où l'on tire une blanche (probabilité $\frac{2}{b}$), puis une noire (probabilité $\frac{b-2}{b}$). Comme il y remise, les tirages sont indépendants et l'on a :

$$p_2 = \frac{2}{b} \times \frac{b-2}{b} \neq 1 - \frac{2}{b^2}\cdot$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Parmi les $n-1$ premiers tirages, il y a $n-1$ façons de choisir le numéro du tirage d'une boule blanche.

Ce choix étant fait, la probabilité de tirer une boule blanche et $n-2$ boules noires est $\frac{2}{b} \times \left(\frac{b-2}{b}\right)^{n-2}$.

Et enfin, la probabilité d'obtenir une boule noire lors du dernier tirage est $\frac{b-2}{b}$.

On a donc :

$$p_n = (n-1) \times \frac{2}{b} \times \left(\frac{b-2}{b}\right)^{n-2} \times \frac{b-2}{b} = \frac{2(n-1)}{b}\left(1-\frac{2}{b}\right)^{n-1}$$

c) Comme $p_n \in]0;1[$, on a $\ln n \in]-\infty;0[$ et la limite proposée est impossible.

En temps libre, comme $0 < 1-\frac{2}{b} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{b}\right)^{n-1} = 0$;

par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2(n-1)}{b} = +\infty$.

Mais la croissance comparée des puissances et des exponentielles montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0^+$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(p_n) = -\infty$.

d) L'expression $\frac{p_n}{n-1} = \frac{2}{b}\left(1-\frac{2}{b}\right)^{n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

7

a.	b.	c.	d.
V	V	F	F

a) Le dé étant bien équilibré, les faces sont équiprobables. La probabilité de gagner une manche est donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Les lancers étant indépendants, la probabilité de gagner une partie et donc : $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

b) Le gain algébrique est de 26 € avec une probabilité $\frac{1}{27}$ et de -1 € avec une probabilité $\frac{26}{27}$. Son espérance est donc :

$$26 \times \frac{1}{27} - 1 \times \frac{26}{27} = 0.$$

Le jeu est équitable.

c) L'événement contraire « perdre trois fois » a pour probabilité $\left(\frac{26}{27}\right)^3$. La probabilité de l'événement de l'énoncé est donc :

$$1 - \left(\frac{26}{27}\right)^3 \neq \frac{1}{9}.$$

d) La probabilité que le joueur gagne la partie sachant qu'il a gagné la première manche est $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.
La probabilité que le joueur gagne la première manche sachant qu'il a gagné la partie est 1.

8

a.	b.	c.	d.
F	F	V	V

a) Dans U_1, comme il y a remise, l'événement N a pour probabilité :

$$\frac{n}{2n} \times \frac{n}{2n} = \frac{1}{4}.$$

Dans U_2, comme il n'y a pas remise, l'événement N a pour probabilité :

$$\frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

b) Nous venons de calculer $p_{U_1}(N) = \frac{1}{4}$ et $p_{U_2}(N) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
Ces probabilités sont donc différentes.

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{1}{4}$ on a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} p_{U_1}(N) = \lim_{n\to+\infty} p_{U_2}(N).$$

Ce résultat signifie que, lorsqu'il y a un très grand nombre de boules, un tirage sans remise peut s'assimiler à un tirage avec remise.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d) On utilise le théorème des probabilités totales :

$$p(N) = p(U_1) \times p_{U_1}(N) + p(U_2) \times p_{U_2}(N)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{2n-1+2(n-1)}{8(2n-1)} = \frac{4n-3}{8(2n-1)}.$$

L'affirmation de l'énoncé est donc exacte.

9

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	V	F	V

Reprenez et complétez le tableau.

	A_1	A_2	A_3	Total/B
B_1	**0**	20	**4**	**24**
B_2	30	**40**	**6**	**76**
Total/A	**30**	**60**	10	100

Avec $p(A_2) = 60\%$, on a le total de la colonne A_2, puis l'autre case de la colonne par soustraction.

Par soustraction, on a le total de la colonne A_1, puis l'autre case de la colonne.

Pour déterminer le nombre x à mettre dans la case en haut à doite, il reste l'information :

$$\frac{1}{6} = p_{B_1}(A_3) = \frac{p(B_1 \cap A_3)}{p(B_1)} = \frac{x-20}{x}.$$

On en déduit $x = 24$, et le tableau se termine par des soustractions.

a) Comme $p(A_1 \cap B_1) = 0$,les événements A_1 et B_1 sont bien incompatibles.

b) La lecture du total de la ligne B_1 donne bien $p(B_1) = 24$ %.

c) Avec le tableau, on obtient : $p_{A_3}(A_3 \cap B_1) = \dfrac{p(B_1 \cap A_3)}{p(A_3)} = \dfrac{4}{10}$ soit 40 %.
L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.

d) Le tableau indique que l'affirmation est vraie.

10

a.	b.	c.	d.	e.
F	V	V	F	V

Pour répondre très rapidement, on va assimiler les probabilités des événements avec les fréquences observées de ces mêmes événements sur un effectif de référence de 1 000 élèves.

Les informations données se traduisent alors par le tableau des effectifs :

	TS	$\overline{TS}$	totaux
SA	260	390	650
$\overline{SA}$	70	280	350
totaux	330	670	1 000

a) Dans la case $SA \cap TS$, il y a 260 élèves, soit $P(SA \cap TS) = \dfrac{260}{1\,000} \neq \dfrac{2}{5}$.

b) Sachant qu'on se trouve sur la ligne $\overline{SA}$, on a la probabilité conditionnelle :

$$P(\overline{TS}/\overline{SA}) = \frac{280}{350} = 0{,}8 = \frac{4}{5}.$$

c) Sachant qu'on se trouve sur la ligne SA, on a la probabilité conditionnelle :

$$P(\overline{TS}/SA) = \frac{390}{650} = 0{,}6 = \frac{3}{5}.$$

d) Dans la case $TS \cap \overline{SA}$, il y a 70 élèves, soit $P(TS \cap \overline{SA}) = \dfrac{70}{1\,000} \neq \dfrac{3}{5}$.

e) Le total de la colonne TS est de 330 ; d'où $P(TS) = \dfrac{330}{1\,000} = \dfrac{33}{100}$.

11

1. L'arbre ci-dessous représente tous les trajets possibles, du sommet S au village V, avec les diverses probabilités conditionnelles.

La probabilité d'un chemin s'obtient alors par multiplication des probabilités écrites sur le parcours.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

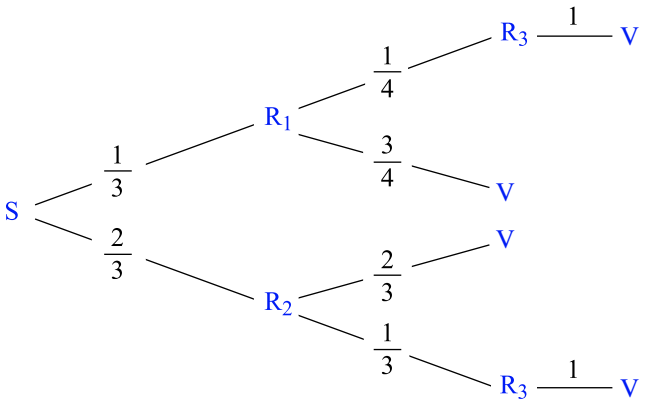

Figure 10.4

2. a) On lit : $p_1 = P(R_3/R_1) = \dfrac{1}{4}$.

b) Avec le théorème des probabilités totales, on a :

$$p_2 = P(R_3) = P(R_1) \times P(R_3/R_1) + P(R_2) \times P(R_3/R_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{36}.$$

c) $p_3 = P(R_1/R_3) = \dfrac{P(R_1 \cap R_3)}{P(R_3)} = \dfrac{P(R_1) \times P(R_3/R_1)}{P(R_3)}$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11}.$$

3. Reprenons les divers chemins visualisés par l'arbre.

R_1R_3V a pour probabilité $\dfrac{1}{12}$ et conduit à $D = 11$.

R_1V a pour probabilité $\dfrac{3}{12}$ et conduit à $D = 10{,}5$.

R_2V a pour probabilité $\dfrac{4}{9}$ et conduit à $D = 10$.

R_2R_3V a pour probabilité $\dfrac{2}{9}$ et conduit à $D = 10{,}5$.

On obtient ainsi la loi de probabilité de D :

x_i	10	10,5	11
$P(D = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{12}$

En réduisant ces trois fractions au même dénominateur 36, vérifiez que leurs somme est bien égale à 1.

12 Notons les événements associés au choix d'un individu pris au hasard : B « l'individu est bleu », « l'individu est musicien ».

● **Rédaction attendue** (langage des probabilités)

Les informations fournies s'écrivent :

$$P(M) = 0{,}85 \ ; \ P(V) = 0{,}15 \ ; \ P(B/M) = 0{,}9 \ ; \ P(B) = x.$$

1. Les événements B et M sont indépendants si, et seulement si :

$$P(B) = P(B/M) \iff x = 0{,}9.$$

2. Avec la définition des probabilités conditionnelles on a :

$$P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P(B/M)}{P(B)} = P(M)\,\frac{0{,}9}{x}$$

$$P(M/V) = \frac{P(M \cap V)}{P(V)} = \frac{P(M) \times P(B/V)}{P(V)} = P(M)\,\frac{0{,}1}{1-x}$$

On a donc :

$$P(M/B) \geqslant P(M/V) \iff \frac{0{,}9}{x} \geqslant \frac{0{,}1}{1-x} \iff x \leqslant 0{,}9.$$

3. Il y a la même proportion de musiciens parmi les individus et et les individus bleus quand les deux probabilités conditionnelles de la question précédente sont égales ; c'est-à-dire si $x = 0{,}9$.

● **Traduction en fréquences** (Dans une épreuve type QCM, il existe une autre version possible que vous pouvez préférer si vous n'êtes pas à l'aise avec l'écriture probabiliste)

Considérons un échantillon de référence de taille élevée (par exemple 1 000).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En assimilant les probabilités avec des fréquences observées, on a le tableau des effectifs :

	B	V	totaux
M	765	85	850
$\overline{M}$			150
totaux	$1\,000\,x$	$1\,000\,(1-x)$	1 000

1. Les événements B et M sont indépendants si, et seulement si :

$$\frac{765}{1\,000} = \frac{850}{1\,000} \times \frac{1\,000\,x}{1\,000} \iff x = 0{,}9.$$

2. Pour que la probabilité que l'individu soit musicien sachant qu'il est bleu soit supérieure à la probabilité que l'individu soit musicien sachant qu'il est vert, il faut et il suffit :

$$P(M/B) \geqslant P(M/V) \iff \frac{765}{1\,000\,x} \geqslant \frac{85}{1\,000\,(1-x)} \iff 765 \geqslant 850x$$
$$\iff x \leqslant 0{,}9.$$

3. Il y a la même proportion de musiciens parmi les individus et et les individus bleus quand les deux probabilités conditionnelles de la question précédente sont égales ; c'est-à-dire si $x = 0{,}9$.

13

Réponse : E (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

Pour avoir à effectuer six tirages avec les règles indiquées, il faut que les tirages successifs soient $RRRRRN$. La probabilité de cet événement peut se calculer avec des dénombrements, ou avec des probabilités conditionnelles :

$$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}\cdot$$

14

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	V	V	V

C'est un exercice pour lequel un tableau d'effectifs est très efficace. On prend une population de référence 1 000 ampoules, et on fait les répartitions comme indiquées dans l'énoncé.

	D	$\overline{D}$	Totaux
Alpha	42	558	600
Béta	16	384	400
Totaux	58	942	1 000

Par lecture directe, vous répondez V pour les trois premières affirmations.

La quatrième correspond à $\frac{42}{58} \approx 0{,}72$ et elle est donc vraie.

11 Variables aléatoires

Thèmes du chapitre

Définition, espérance mathématique, variance.
Lois discrètes : loi de Bernoulli, loi binomiale. Lois continues : loi uniforme, loi exponentielle.

Des savoir-faire à maîtriser

- Loi binomiale

On répète n fois, de façon indépendante, la même expérience où l'on s'intéresse à l'apparition, ou non, d'un événement A de probabilité fixe p.
Si X désigne le nombre de fois où A est réalisé, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Les valeurs possibles sont les entiers consécutifs de 0 à n.
Les probabilités élémentaires, l'espérance et la variance sont :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p).$$

- Loi uniforme sur $[a; b]$

C'est une loi continue dont la densité est nulle en dehors de $[a; b]$, et constante, de valeur $\dfrac{1}{b-a}$, sur cet intervalle.

- Loi exponentielle de paramètre λ

C'est une loi continue qui admet pour densité :

$$f(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \quad ; \quad f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Elle modélise un processus sans mémoire.

Des réflexes à avoir

- Connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète, c'est connaître les valeurs possibles (en nombre fini, ou $\mathbb{N}$ l'an prochain) et les probabilités élémentaires $p_i = P(X = x_i)$. Ces nombres sont positifs et leur somme est égale à 1.

- Connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue, c'est connaître les valeurs possibles (un intervalle I) et une fonction densité f positive et dont l'intégrale sur I est égale à 1.

On s'intéresse alors aux intervalles : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et la probabilité d'un point est nulle.

1 GEIPI-Polytech 2008

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte, écrite sous forme de fraction irréductible.

Au cours d'une loterie, vingt billets sont mis en vente au prix de 6 € le billet. Cinq billets seulement sont gagnants, chacun rapportant 30 €.

Un joueur achète deux billets.

On note X la variable aléatoire représentant le bénéfice net du joueur, exprimé en euros. Le bénéfice net est le gain (positif ou nul) perçu par le joueur à l'issue de la partie, diminué du prix d'achat des deux billets. Le bénéfice net peut donc être négatif.

1. a) Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de X.

b) Donner l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

2. L'organisateur de la loterie propose de multiplier les gains par deux si on achète les billets à 13 € le billet.

Soit Y la variable aléatoire représentant le bénéfice net, en euros, d'un joueur achetant deux billets à 13 € le billet.

a) Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de Y.

b) Donner l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y.

c) Le joueur a-t-il intérêt à accepter la proposition de l'organisateur ? Justifier la réponse.

2 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On considère deux dés cubiques équilibrés A et B.

Sur le dé A, les chiffres 1,3 et 5 sont inscrits chacun sur deux faces.

Sur le dé B, une face est marquée 2, deux faces sont marquées 4 et trois faces sont marquées 6.

On jette les deux dés (les lancers sont indépendants), on note X la variable aléatoire qui, à chaque événement, fait correspondre la somme des chiffres obtenus.

a) L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{3, 5, 7, 9, 11\}$.

b) $P(X = 3) = \dfrac{1}{9}$.

c) $P(X = 7) = \dfrac{1}{3}$.

d) $P(X \leqslant 10) = \dfrac{5}{6}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Soit X la variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

a) $P(3 < X \leqslant 5) = \frac{1}{2}$ **b)** $P(X > 3) = \frac{5}{8}$

c) $P\left[(3 < X) \cup (4 < X \leqslant 6)\right] = \frac{3}{4}$ **d)** $E(X) = \frac{33}{8}$

4 GEIPI-ENI 2008

Une seule réponse vraie

On tire au hasard une boule dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la boule tirée.

Donner la valeur de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

A : $E(X) = 1$ **B** : $E(X) = \frac{11}{2}$ **C** : $E(X) = 11$

D : $E(X) = \frac{1}{10}$ **E** : $E(X) = 5$

5 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Une usine fabrique des détecteurs de fumée. Ces détecteurs disposent chacun d'une durée de vie aléatoire (en mois) représentée par une variable aléatoire T.

Cette variable suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, dont la loi de densité est la fonction f_λ définie par :

$$f_\lambda(t) = 0 \quad \text{pour } t \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f_\lambda(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{pour } t > 0.$$

Les tests indiquent qu'un détecteur donné a 1 chance sur 2 de tomber en panne à la fin de son premier mois de bon fonctionnement. En cas de panne, le détecteur défaillant est immédiatement remplacé par un détecteur neuf. Un contrôle est effectué chaque mois après l'installation du premier détecteur.

On admet que le fonctionnement des détecteurs est indépendant d'un détecteur à un autre.
On désire équiper une petite salle avec l'un de ces détecteurs de fumée.

a) $\lambda = \ln 2$.

b) La probabilité de changer au moins une fois le détecteur lors de l'un des deux premiers contrôles est égale à 1.

c) La probabilité de changer le détecteur une fois et une seule lors de l'un des cinq premiers contrôles est égale à $\frac{5}{32}$.

d) Pour tout entier supérieur ou égal à 1, la probabilité que le détecteur ne soit pas changé lors des n premiers contrôles est égale à $\frac{1}{2^n}$.

6 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Une rampe lumineuse est constituée d'ampoules bleues, rouges ou jaunes provenant de deux usines U_1 et U_2. U_1 produit 60 % de ces ampoules.
La durée de vie en années de chacune de ces ampoules suit une loi exponentielle dont les paramètres sont les suivants :

	Ampoules bleues	Ampoules rouges	Ampoules jaunes
Ampoules de U_1	$\lambda_{B_1} = 0{,}25$	$\lambda_{R_1} = 0{,}20$	$\lambda_{J_1} = 0{,}15$
Ampoules de U_2	$\lambda_{B_2} = 0{,}20$	$\lambda_{R_2} = 0{,}15$	$\lambda_{J_2} = 0{,}10$

a) La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans sachant qu'elle vient de U_1 est : $0{,}6\,(1 - \mathrm{e}^{-1})$.

b) La probabilité qu'une ampoule bleue dure moins de 5 ans est :

$$1 - 0{,}6\,\mathrm{e}^{-1{,}25} - 0{,}4\,\mathrm{e}^{-1}.$$

c) La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre 5 et 10 ans est :

$$0{,}6\,\left(\mathrm{e}^{-0{,}75} - \mathrm{e}^{-1{,}5}\right) + 0{,}4\,\left(\mathrm{e}^{-0{,}5} - \mathrm{e}^{-1}\right).$$

d) La demi-vie en années d'une ampoule jaune de U_2 est $4 \ln 2$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

7 ESIEE 2007

Vrai ou faux ?

La durée de vie d'un mixeur, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

Alors :

a) $P(X > 6) = \mathrm{e}^{-0,6}$.

b) $P(X \leqslant 5) = P(X \geqslant 5)$.

c) L'espérance de X est égale à 10.

d) $P(X \leqslant 6/X \geqslant 2) = P(X \leqslant 4)$.

e) $P(X \geqslant 6/X \geqslant 2) = P(X \geqslant 4)$.

8 FESIC 2005

Vrai ou faux ?

Un feu tricolore de circulation reste 55 secondes au vert et 5 secondes à l'orange, temps pendant lesquels un piéton ne peut pas traverser. Puis il reste 60 secondes au rouge, temps pendant lequel un piéton peut traverser.

Dans l'exercice, on ne s'intéresse qu'aux seuls piétons qui se présenteraient pour traverser à ce feu tricolore entre 8 h 00 et 8 h 05.

À 8 h 00, ce feu se met au rouge. On appelle T la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé entre 8 h 00 et l'heure d'arrivée devant ce feu d'un piéton qui souhaite traverser.

On admet que T suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle $[0; 300]$.

a) La densité de probabilité associée à T est la fonction définie ainsi :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{3} & \text{si } t \in [0; 60[\text{ ou si } t \in [120; 180[\text{ ou si } t \in [240; 300[\\ f(t) = 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

b) La probabilité qu'un piéton attende moins de 10 secondes est $\dfrac{2}{3}$.

c) La probabilité qu'un piéton attende plus de 40 secondes est $\dfrac{2}{15}$.

d) Entre 8 h 00 et 8 h 05, 10 piétons se présentent à ce feu tricolore. La probabilité que 3 d'entre eux exactement aient attendu moins de 10 secondes est $\dfrac{2^3}{3^{10}}$.

9 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Un jeu est constitué de 16 cartes Valets, Dames, Rois et As de couleurs ♠, ♣, ♡, ♢.

On effectue cinq tirages successivement en replaçant dans le jeu la carte tirée après chaque tirage.

Un joueur touche 5 € par As contenu dans sa série de 5 cartes.

On note X la variable aléatoire égale au gain obtenu.

a) L'ensemble des valeurs prises par la variable X est $\{5, 10, 15, 20, 25\}$.

b) $P(X = 15) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

c) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{3}{4}$.

d) $E(X) = \frac{5}{4}$.

Corrigés

11 Variables aléatoires

1 **1. a)** Il y a $\binom{20}{2} = \dfrac{20 \times 19}{2} = 190$ situations possibles (achat de 2 billets parmi 20).

Il peut y avoir : 0 billet gagnant, de $\binom{15}{2} = \dfrac{15 \times 14}{2} = 105$ façons ;

1 billet gagnant, de $15 \times 5 = 75$ façons ;

2 billets gagnants, de $\binom{5}{2} = 10$ façons.

En tenant compte du prix d'achat, on obtient donc pour le bénéfice net X (avec des fractions irréductibles) :

x_i	-12	18	48
$P(X = x_i)$	$\dfrac{21}{38}$	$\dfrac{15}{38}$	$\dfrac{1}{19}$

b) $E(X) = \dfrac{1}{38}\left[-12 \times 21 + 18 \times 15 + 48 \times 2\right] = 3.$

2. a) Les dénombrements sont les mêmes. Il suffit de modifier les prix.

y_i	-26	34	94
$P(Y = y_i)$	$\dfrac{21}{38}$	$\dfrac{15}{38}$	$\dfrac{1}{19}$

b) $E(Y) = \dfrac{1}{38}\left[-26 \times 21 + 34 \times 15 + 94 \times 2\right] = 4.$

c) Le joueur a intérêt à accepter la nouvelle proposition puisque son espérance de gain est plus grande : $E(Y) > E(X)$.

2

a.	**b.**	**c.**	**d.**
V	F	V	V

a) On additionne un nombre pris parmi $\{1, 3, 5\}$ et un nombre pris parmi $\{2, 4, 6\}$.
Les résultats possibles pour la somme sont : $\{3, 5, 7, 9, 11\}$.

L'affirmation est vraie.

b) Pour obtenir $X = 3$, il faut :

obtenir 1 avec le premier dé (probabilité $\frac{2}{6}$),

et obtenir 2 avec le deuxième dé (probabilité $\frac{1}{6}$).

On a donc :

$P(X = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$.

L'affirmation est fausse.

c) Pour obtenir $X = 7$, on peut :

- ou avoir 1 avec le premier dé (probabilité $\frac{1}{3}$) et 6 avec le deuxième (probabilité $\frac{1}{2}$) ;
- ou avoir 3 avec le premier dé (probabilité $\frac{1}{3}$) et 4 avec le deuxième (probabilité $\frac{1}{3}$) ;
- ou avoir 5 avec le premier dé (probabilité $\frac{1}{3}$) et 2 avec le deuxième (probabilité $\frac{1}{6}$).

La probabilité cherchée est donc :

$$P(X = 7) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

L'affirmation est vraie.

d) Il vaut mieux penser à l'événement contraire $X > 10$, c'est-à-dire :

$$P(X = 11) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit :

$$P(X \leqslant 10) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

L'affirmation est vraie.

3

a.	**b.**	**c.**	**d.**
F	V	F	V

a) $P(3 < X \leqslant 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

L'affirmation est fausse.

b) $P(X > 3) = 1 - \big[P(X = 2) + P(X = 3)\big] = 1 - \big[\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\big] = \frac{5}{8}$.

L'affirmation est vraie.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) $P\left[(3 < X) \cup (4 < X \leqslant 6)\right] = P(3 < X) = \dfrac{5}{8}$.
L'affirmation est fausse.

d) $E(X) = \dfrac{1}{4} \times 2 + \dfrac{1}{8} \times 3 + \dfrac{1}{8} \times 4 + \dfrac{1}{4} \times 5 + \dfrac{1}{4} \times 6 = \dfrac{1}{8}(4+3+4+10+12) = \dfrac{33}{8}$.
L'affirmation est vraie.

4

Réponse : B (dans ce concours, une réponse, et une seule, est correcte.)

La variable aléatoire X prend les valeurs $\{1, 2, \ldots, 10\}$ avec la même probabilité.
Son espérance mathématique (sa moyenne) est le milieu, soit $\dfrac{11}{2}$.

En temps libre, vous pouvez faire la démonstration. Chacune des 10 valeurs possibles a la même probabilité, soit $\dfrac{1}{10}$. On a alors :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10} k = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} k = \frac{1}{10} \frac{10(10+1)}{2} = \frac{11}{2}.$$

car on connaît la somme des n premiers nombres entiers (*cf.* suites arithmétiques) :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

5

a.	b.	c.	d.
V	F	V	V

a) Comme un détecteur a 1 chance sur 2 de tomber en panne à la fin de son premier mois de fonctionnement, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} = P(0 \leqslant T \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad -\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2, \quad \text{soit } \lambda = \ln 2.$$

L'affirmation de l'énoncé est exacte, et le résutat va servir dans la suite.

b) L'affirmation est fausse car elle signifierait qu'aucun détecteur n'a une durée de vie d'au moins deux mois.

c) Question longue et difficile : un jour de concours, une réponse au doigt mouillé pourrait se comprendre !

Pour suivre la réponse ci-après, faites d'abord la question **d)**.

> La loi exponentielle modélise une durée de vie sans vieillissement ou sans mémoire.
> Cela signifie que, si l'on sait que le détecteur n'est pas en panne au bout de k mois, la probabilité qu'il dure encore d mois est égale à la probabilité qu'il dure d mois à partir de sa pose.

Si le détecteur est changé exactement une fois lors des cinq premiers contrôles, le changement peut avoir lieu :

- soit à la date 1 avec la probabilité :

$$P(T \leqslant 1) \times P(T > 4) = \left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right] \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{32}$$

- soit à la date 2 avec la probabilité :

$$P(1 < T \leqslant 2) \times P(T > 3) = \left[\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}\right] \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{32}$$

- soit à la date 3 avec la probabilité :

$$P(2 < T \leqslant 3) \times P(T > 2) = \left[\mathrm{e}^{-2\lambda} - \mathrm{e}^{-3\lambda}\right] \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{32}$$

- soit à la date 4 avec la probabilité :

$$P(3 < T \leqslant 4) \times P(T > 1) = \left[\mathrm{e}^{-3\lambda} - \mathrm{e}^{-4\lambda}\right] \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

- soit à la date 5 avec la probabilité :

$$P(4 < T \leqslant 5) = \left[\mathrm{e}^{-4\lambda} - \mathrm{e}^{-5\lambda}\right] = \frac{1}{32}$$

La probabilité demandée est donc $\frac{5}{32}$: l'affirmation de l'énoncé est exacte.

d) Si le détecteur n'est pas changé lors des n premiers contrôles, c'est que sa durée de vie est $T > n$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Pour calculer la probabilité correspondante, il est préférable de penser à l'événement contraire :

$$P(T > n) = 1 - P(T \leqslant n) = 1 - \int_0^n \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = 1 - \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \Big]_0^n$$
$$= 1 - \left[1 - \mathrm{e}^{-n\lambda}\right] = \mathrm{e}^{-n\lambda} = \left(\mathrm{e}^{\lambda}\right)^n$$

Comme on a déjà vu que $\lambda = \ln 2$, on a $\mathrm{e}^{\lambda} = 2$ et $P(T > n) = \dfrac{1}{2^n}$.

6

a.	b.	c.	d.
F	V	V	F

a) On a : $P(D_1 \leqslant 5) = \displaystyle\int_0^5 0{,}2\, \mathrm{e}^{-0{,}2x}\, \mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0{,}2x} \Big]_0^5 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

b) Ne sachant pas d'où vient l'ampoule bleue, on utilise le théorème des probabilités totales :

$$P(D_2 \leqslant 5) = 0{,}6 \times \int_0^5 0{,}25\, \mathrm{e}^{-0{,}25x}\, \mathrm{d}x + 0{,}4 \times \int_0^5 0{,}2\, \mathrm{e}^{-0{,}2x}\, \mathrm{d}x$$
$$= 0{,}6\left[1 - \mathrm{e}^{-1{,}25}\right] + 0{,}4\left[1 - \mathrm{e}^{-1}\right] = 1 - 0{,}6\, \mathrm{e}^{-1{,}25} - 0{,}4\, \mathrm{e}^{-1}.$$

c) On utilise à nouveau le théorème des probabilités totales.

$$P(5 \leqslant D_3 \leqslant 10) = 0{,}6\Big[-\mathrm{e}^{-0{,}15x} \Big]_5^{10} + 0{,}4\Big[-\mathrm{e}^{-0{,}1x} \Big]_5^{10}$$
$$= 0{,}6\left[\mathrm{e}^{-0{,}75} - \mathrm{e}^{-1{,}5}\right] + 0{,}4\left[\mathrm{e}^{-0{,}5} - \mathrm{e}^{-1}\right]$$

d) La demi-vie est la durée T telle que $P(0 \leqslant D_4 \leqslant T) = \dfrac{1}{2}$. Comme l'ampoule jaune provient de U_2, on a :

$$P(0 \leqslant D_4 \leqslant T) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}1T}.$$

La durée T vérifie donc :

$$\mathrm{e}^{-0{,}1T} = \frac{1}{2} \iff -0{,}1T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff T = 10 \ln 2.$$

7

a.	b.	c.	d.	e.
V	F	V	V	V

a) On a :

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leqslant 6) = 1 - \int_0^6 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}1x}\,\mathrm{d}x = 1 - \Big[-\mathrm{e}^{-0{,}1x}\Big]_0^6 = \mathrm{e}^{-0{,}6}.$$

L'affirmation est donc exacte.

b) $P(X \leqslant 5) = \displaystyle\int_0^5 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}1x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0{,}1x}\Big]_0^5 = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}4$

$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \geqslant 5)$ car $P(X = 5) = 0$ pour une loi continue

$= \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}6$

L'affirmation est donc fausse.

c) On peut savoir que l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$ soit ici 10. Mais c'est hors du programme de Terminale.

d) Sachant que $(X \geqslant 2)$, la probabilité de $(X \leqslant 6)$ est la probabilité que le mixeur dure encore au maximum 4 ans.

Comme la loi exponentielle modélise une durée de vie sans mémoire, c'est la même probabilité que celle de $(X \leqslant 4)$.

L'affirmation est donc exacte.

e) C'est toujours la notion de durée de vie sans vieillissement que modélise une loi exponentielle.

Si l'on sait que le mixeur a déjà duré 2 ans, la probabilité qu'il dure plus de 6 ans, c'est la probabilité qu'il dure plus de 4 ans.

L'affirmation est donc exacte.

8

a.	b.	c.	d.
F	V	V	F

Cet exercice exige une lecture attentive des informations. La variable aléatoire T correspond à l'arrivée du piéton et n'est pas liée à la couleur du feu.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Comme T suit la loi uniforme sur $[0; 300]$, elle admet pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{300} \quad \text{si } t \in [0; 300] \quad ; \quad f(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

b) Dessinons un axe des temps de 0 à 300 secondes, et repérons les zones où l'événement est réalisé.

Figure 11.1

La distribution étant uniforme, la probabilité s'obtient en faisant le quotient des durées, c'est-à-dire des longueurs du dessin :

$$p_1 = \frac{60 + 70 + 70}{300} = \frac{2}{3} \cdot$$

c) Même réflexe que pour la question précédente.

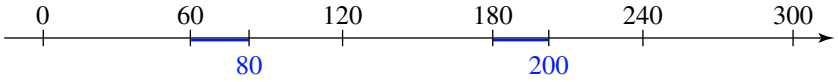

Figure 11.2

$$p_2 = \frac{20 + 20}{300} = \frac{2}{15} \cdot$$

d) Si les 10 piétons sont indépendants entre eux (hypothèse non explicitée mais indispensable), le nombre X de piétons qui attendent moins de 10 secondes suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{2}{3} \cdot$ On a donc :

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 120 \times \frac{2^3}{3^{10}} \cdot$$

9

a.	b.	c.	d.
F	V	F	F

a) Si Y désigne le nombre d'as obtenus, Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{4} \cdot$ Ses valeurs possibles sont $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Comme $X = 5Y$, les valeurs possibles pour X sont : $\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$.
L'affirmation est fausse.

b) On a $P(X = 15) = P(Y = 5) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

L'affirmation est vraie.

c) Les valeurs possibles de X ne sont pas des entiers consécutifs. X ne peut donc pas suivre une loi binomiale.
L'affirmation est fausse.

d) On a $E(X) = 5E(Y) = 5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$.

L'affirmation est fausse.